Universität Konstanz
Fachbereich Physik
Priv. Doz. Dr. Peter Keim

Ausgabedatum: 23.01.2017
Abgabedatum: 30.01.2017
Besprechung 01.02.2017

ÜbungsgruppenleiterInnen: A. Grupp, A. Liehl, J. Schmidt, J. Bühler
J. Roller, L. Siedentop, M. Fischer

Übungen zu Integrierter Kurs III (Experimentalteil)

Blatt 12

Aufgabe 31: Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung (mündlich, 1 Kreuzchen)

a) Leiten Sie aus der Maxwell-Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilung:

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}.\right)$$

einen Ausdruck für

(i) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_m und
(ii) die mittlere Geschwindigkeit $\langle v \rangle$

her.

b) Die Temperatur im interstellaren Raum beträgt 2,7 K. Berechnen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit sowie die mittlere Geschwindigkeit für atomares Helium und Wasserstoffmoleküle bei dieser Temperatur.

Aufgabe 32: Diffusion (mündlich, 1 Kreuzchen)

Eine rosa Flüssigkeit befinde sich in einem Lösungsmittel (z.B. Alkohol). Wir nehmen an, dass alle Moleküle eine hinreichend ähnliche Wechselwirkung untereinander haben, sodass die Diffusionskonstante D für die Farbe unabhängig von ihrer zeit- und ortsabhängigen Konzentration bzw. Anzahldichte $c = c(\vec{r}, t)$ ist. Die 3D-Diffusionsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2 c.$$

a) Zeigen Sie explizit, dass die normierte 3D-Gauss-Verteilung mit geeignetem zeitabhängigem Radius $\sigma(t)$

$$c_G(\vec{r}, t) = \left[2\pi\sigma^2(t)\right]^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2(t)}\right)$$

eine Lösung für die 3D-Diffusionsgleichung ist. Sie werden auf eine Differentialgleichung für $\sigma(t)$ stoßen, die leicht lösbar ist. Lösen Sie die DGL für die Anfangsbedingung $\sigma(0) = 0$ (die Lösung $c_G(\vec{r}, t = 0)$ ergibt dann eine 3D-Deltafunktion im Ortsraum).

b) Die Lösung der Diffusionsgleichung ist also kugelsymmetrisch. Skizzieren Sie die Lösung in einer ausgezeichneten Raumrichtung für drei feste Zeiten $t_3 > t_2 > t_1 = 0$.

c) Wie sähe die Diffusionsgleichung und deren Lösung in einer Dimension aus?

d) Berechnen Sie das mittlere Verschiebungsquadrat $\langle x^2(t) \rangle$ für die Lösung der eindimensionalen Diffusionsgleichung.

Aufgabe 33: Van-der-Waals Gas (schriftlich, 10 Punkte)

Ein reales Gas kann näherungsweise mit der Van-der-Waals-Zustandsgleichung beschrieben werden:

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = Nk_BT.$$

a) Für welche Korrekturen stehen die Konstanten a und b?
b) Für CO_2 ist $a = 0{,}365\ \mathrm{Jm^3/mol^2}$ und $b = 4{,}27 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol}$. Schätzen Sie damit den Durchmesser der Moleküle ab.
c) Zeigen Sie, dass für hinreichend kleine Dichten n/V die Zustandsgleichung des idealen Gases zurückerhalten wird.
d) 1 Mol dieses Gases seien nun in einem Volumen von 5 L und besitzen eine Temperatur von 20°C. Das Gas befindet sich in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad gleicher Temperatur und wird anschließend auf ein Volumen von 0,5 L isotherm komprimiert. Berechnen Sie für beide Volumina den Druck mit Hilfe der Van-der-Waals-Gleichung und vergleichen Sie mit dem Druck, den die Ideale Gasgleichung liefern würde.
e) Plotten und diskutieren Sie die Isothermen für 1 Mol CO_2 bei den Temperaturen $T_1 = 0°\mathrm{C}$, $T_2 = 31°\mathrm{C}$ und $T_3 = 70°\mathrm{C}$ im Bereich $0{,}05\ \mathrm{L} < V < 0{,}7\ \mathrm{L}$. Verwenden Sie hierzu eine Software Ihrer Wahl (z.B. MATLAB, Mathematica, ...; keine Zeichnung oder Skizze!). Wo macht die Van-der-Waals-Gleichung Probleme und wie lässt sich dies beheben? Recherchieren und erläutern Sie außerdem die Bedeutung des kritischen Punkts.
f) Leiten Sie zunächst allgemeine Ausdrücke für die kritische Temperatur T_c, das kritische Volumen V_c sowie den kritischen Druck p_c her, die nur noch Konstanten enthalten. Berechnen Sie diese Größen anschließend für 1 Mol CO_2.