Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik
SoSe 11

Universität Konstanz

Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

Übungsblatt Nr. 11,

Ausgabedatum: Mo. 27.06.2011
Abgabedatum: Fr. 01.07.2011 in der Vorlesung
Besprechung: Mi. 06.07.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 23: Doppler-Verbreitung von Spektrallinien

Es soll die Spektrallinie einer Straßenlaterne (Natrium-Dampflampe) bestimmt werden. Die Lampe wird bei 500K betrieben. Die Messung ergibt ein Gaußprofil mit einer Halbwertsbreite von $\delta\omega_D = 1.07 \times 10^{10} s^{-1}$.

a) Die Dopplerverschiebung führt zu einer wesentlichen Verbreiterung der spektralen Linie. Betrachten Sie zunächst ein Atom, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt und ein Photon mit der Frequenz ω_0 in Richtung $\vec{k}$ emittiert. Welche Frequenz 'sieht' ein Beobachter? Welche Frequenz müsste eine Lichtwelle (die in z-Richtung einfällt) haben, damit das bewegte Atom Photonen der Frequenz ω_0 absorbieren kann?

b) Betrachtet werden nun Atome in einem Gas bei $T = 500K$ im thermischen Gleichgewicht. Berechnen Sie die Anzahl der Atome, deren Emission bzw. Absorption in das Frequenzintervall zwischen ω und $\omega + d\omega$ fallen. Berechnen Sie hieraus die emittierte/absorbierte Strahlungsleistung $P(\omega)d\omega$.
Hinweis: Benutzen Sie die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$n_i(v_z)dv_z = \frac{N_i}{v_\omega\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{v_z}{v_\omega}\right)^2\right] dv_z$$

mit $v_\omega = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$; wahrscheinlichste Gewschwindigkeit
und $N_i = \int_{-\infty}^{\infty} n_i(v_z)dv_z$; Gesamtzahl der Atome im Zustand E_i pro Volumeneinheit.
Ergebnis: $P(\omega)d\omega = P(\omega_0) \cdot \exp\left(-\left[\frac{c(\omega-\omega_0)}{\omega_0 v_w}\right]\right) d\omega$

c) Berechnen Sie die Halbwertsbreite $\delta\omega_D(\omega_0, T, m) = |\omega_1 - \omega_2|$ mit $P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_0)/2$. Ergebnis: $\delta\omega_D = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{8k_BT\cdot\ln 2}{m}}$

d) Wie groß ist die Wellenlänge der Na-D Linie ($3P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$)? Welche Farbe hat die Straßenlaterne? Vergleichen Sie die Dopplerverbreiterung mit der natürlichen Linienbreite der Na-D Linie (Lebensdauer $\tau = 16ns$).
(Molmasse $M_{Na} = 0.023kg/mol$).

Aufgabe 24: Wasserstoffatom im elektrischen Feld - Stark-Effekt

Betrachten Sie ein Elektron im Coulombpotential $V(r)$ eines Protons mit dem Hamiltonoperator $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$. Der Einfachheit halber betrachten wir nur Wellenfunktionen zur Hauptquantenzahl $n = 2$. (Literatur unter den Schlagworten: Stationäre Störungsrechnung, linearer Stark-Effekt, Aufhebung von Entartung, z.B. Greiner, Band4)

a) Für welche drei Operatoren von $\hat{H}$, $\hat{p}_i$, $\hat{L}^2$ und $\hat{L}_z$ können gemeinsame Eigenzustände gefunden werden? Wieviele Eigenzustände gehören zu den Wellenfunktionen d.h. welche Entartungen liegen vor?

b) Charakterisieren Sie die Zustände nach ihren Eigenschaften unter Spiegelung $\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, welche in Kugelkoordinaten lautet $(r, \vartheta, \varphi) \to (r' = r, \vartheta' = \pi - \vartheta, \varphi' = \pi + \varphi)$.

c) Auf das System wirke nun ein konstantes elektrisches Feld der Stärke in $\mathbf{z}$-Richtung, welches von einem elektrischen Potential $\Phi(z) = Fz$ stammt. Das Feld $-F$ ist schwach gegenüber den inneratomaren Feldern ($5 \cdot 10^9\ V/cm$), so dass wir es als kleine Störung betrachten können. Was ergibt sich für $[\hat{L}_z, \hat{\Phi}]$, wobei $\hat{L}_z$ die z-Komponente des Bahndrehimpulsoperators ist? Bestimmen Sie die Matrixelemente von

$$\Phi_{lmkn} = \int \psi_{2lm} \hat{\Phi} \psi_{2kn}$$

(lm und kn laufen dabei über die vier verschiedenen Quantenzahlen der Kugelflächenfunktionen zu $n = 2$, sie könnten der Einfachheit also zu $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ zusammengefasst werden. Welche sind die einzigen, die nicht aus Symmetriegründen Null sein müssen? D.h. verwenden Sie die Eigenschaften von $\Phi(z)$ und der Zustände unter Spiegelung, um alle Matrixelemente von Φ zu finden, die ungleich Null sind, ohne diese explizit zu berechnen. Wie viele verschiedene sind es?
Hinweis: Es reicht aus, die Diagonalelemente zu betrachten. Bestimmen Sie dafür z.B. die Winkelanteile der Diagonalmatrixelemente von $\Phi(z)$. Die Kugelflächenfunktionen zu den niedrigsten Quantenzahlen lauten

$$Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad ; \quad Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta$$
$$Y_1^1(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{i\varphi} \sin\vartheta \quad ; \quad Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, e^{-i\varphi} \sin\vartheta$$

d) Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabenteil c) um die Energieeigenwerte der Matrix $\langle\alpha|H|\beta\rangle$ des Hamiltonoperators $H = H_0 + q\Phi$ zu bestimmen; $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ stehen hier für die relevanten Eigenfunktionen des ungestörten Hamiltonoperators H_0.

e) Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Energieeigenwerte von F anhand einer Skizze, indem Sie die Grenzfälle $F \ll F_0$ und $F \gg F_0$ mit $F_0 = \Delta E/(2q\langle z\rangle)$ betrachten.

f) Bestimmen Sie den Eigenzustand, der zur niedrigsten Energie gehört und diskutieren Sie seine Abhängigkeit von F.

(schriftlich abzugeben, 12 Punkte)