Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik
SoSe 11

Universität Konstanz

Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

Übungsblatt Nr. 10,

Ausgabedatum: Mo. 20.06.2011
Abgabedatum: Fr. 24.06.2011 in der Vorlesung
Besprechung: Mi. 29.06.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 20: Direkte Messung von Wellenfunktionen

Besorgen Sie sich folgenden wissenschaftlichen Artikel: J.S. Lundeen et al.: *Direct measurement of quantum wavefunction*, Nature, **474**, 188 (2011). (Ist im Uninetz oder mittels VPN-client kostenlos herunterladbar). Lesen Sie den Artikel und diskutieren sie darüber in der Übungsgruppe!

Aufgabe 21: Dipolmatrixelemente im H-Atom

Die einfachsten Wasserstoffwellenfunktionen $\Psi_{n,l,m}(r,\vartheta,\varphi)$ lauten:

$$\Psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}, \quad \Psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a^{3/2}}(2-\frac{r}{a})e^{-r/(2a)} \quad \text{und} \quad \Psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}a^{3/2}}\frac{r}{a}e^{-r/(2a)}\cos\vartheta.$$

a ist der Bohrsche Radius.

a) Berechnen Sie das Dipolmatrixelement

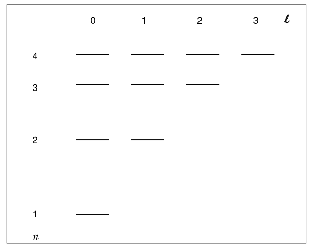
$$\vec{D} = \int d^3\vec{r}\ \Psi_A^*\ e\vec{r}\ \Psi_B = \int_0^\infty r^2\ dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta\ d\vartheta\ \Psi_A^*(r,\vartheta,\varphi)\ e \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \Psi_B(r,\vartheta,\varphi)$$

für die Fälle:

i) $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$ und $\Psi_B = \Psi_{1,0,0}$,
ii) $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$ und $\Psi_B = \Psi_{2,0,0}$,
iii) $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$ und $\Psi_B = \Psi_{2,1,0}$.

(Das e in der $\vec{D}$-Formel bedeutet die Elementarladung.)

b) Nehmen Sie die Ergebnisse von a) als Bestätigung dafür, dass Dipolübergänge zwischen Niveaus beliebiger (hier verschiedener) n erlaubt sind, aber die l sich genau um eins unterscheiden müssen, wobei es egal ist, ob das Ausgangs- oder das Endniveau das höhere l hat. In unserem Wasserstoffmodell (bis jetzt ohne relativistische Korrektur und Spin) gibt es zu jedem n (angefangen mit 1) n entartete Zustände mit $l = 0, \ldots, n-1$. Eine Aufspaltung bzw. Entartung bezüglich m betrachten wir in dieser Teilaufgabe nicht, d.h. Wir haben in a) nur Ψ mit $m = 0$ genommen; also folgern wir, dass es erlaubte Dipolübergänge gibt, wenn Δm und m Null ist,



aber andere Fälle haben wir noch nicht gepüft. Tragen Sie in dem Schema, dass Zustände bis $n = 4$ zeigt, alle erlaubten Dipolübergänge durch Verbinden der entsprechenden Balken ein, wobei Sie representativ nur Zustände mit $m = 0$ betrachten.)

Aufgabe 22: Eigenfunktionen von Drehimpulsoperatoren
(schriftlich abzugeben, 7 Punkte)

a) Stellen Sie sich als Vorbereitung alle Elemente der Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y & \partial r/\partial z \\ \partial \vartheta/\partial x & \partial \vartheta/\partial y & \partial \vartheta/\partial z \\ \partial \varphi/\partial x & \partial \varphi/\partial y & \partial \varphi/\partial z \end{pmatrix}$$

zusammen. (r, ϑ, φ) bedeuten Kugel-, (x, y, z) kartesische Koordinaten.

b) Drücken Sie jetzt $L_x = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $L_y = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$ und $L_z = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$ in Kugelkoordinaten aus. Benutzen Sie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varphi}$ etc. Zeigen Sie weiterhin, dass mit den Definitionen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$ gilt:

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \quad \text{und} \quad L_- = -\hbar e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} - i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi}$ sollte sich schon vorher ergeben haben.

c) Überprüfen Sie durch Einsetzen für L_+ und L_-, dass $\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$ dem Drehimpulsbetrag $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ entspricht. Benutzen Sie hierbei *nicht* bereits eine Darstellung der Produkte L_+L_- und L_-L_+ durch L^2 und L_z, wie sie sie vielleicht aus der Vorlesung kennen, sondern lediglich die Definitionen aus b). Mit den expliziten Formel aus b) zeigen Sie nun weiter, dass gilt:

$$\frac{L^2}{\hbar^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

d) Die Kugelflächenfunktionen lauten: $Y_l^l(\vartheta, \varphi) = c_l e^{il\varphi}(\sin\vartheta)^l$. c_l ist die Normierungskonstante, $c_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$. Lernen Sie die alle auswendig ODER prägen Sie sich eine visuelle Darstellung (z.B. animiertes .gif in Wiki) gut ein! Y_l^{m-1} ergibt sich aus Y_l^m als

$$Y_l^{m-1} = \left(\hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\right)^{-1} L_- Y_l^m.$$

Es gibt $2l + 1$ mögliche Werte für m. m läuft von $-l$ bis l. Berechnen Sie mit der angegebenen Rekursionsformal explizit alle Funktionen Y_l^m für $l = 0$, $l = 1$ und $l = 2$.