Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik
SoSe 11

Universität Konstanz

Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

Übungsblatt Nr. 7,

Ausgabedatum: Mo. 30.05.2011
Abgabedatum: Fr. 03.06.2011 in der Vorlesung
Besprechung: Mi. 08.06.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 12: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Die Bewegung eines Teilchens werde durch einen zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillator beschrieben. Der Hamiltonoperator lautet

$$H = H_x + H_y \quad \text{mit} \quad H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad \text{und} \quad H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 y^2$$

a) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung $H\Psi = E\Psi$ durch einen Separationsansatz $\Psi(x,y) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y)$ gelöst wird, wobei Ψ_x und Ψ_y jeweils Lösungen der Schrödingergleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators zu den Eigenwerten E_x und E_y sind. Es gilt dann $E = E_x + E_y$. (Hinweis: Wenn ein Ausdruck, der nur von x abhängt, gleich einem Ausdruck ist, der nur von y abhängt, müssen beide ein und dieselbe Konstante sein.)

b) Zählen Sie die möglichen Energieeigenwerte E auf. Diskutieren Sie die Entartung der drei niedrigsten Niveaus.

c) Die niedrigsten beiden Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators lauten:

$$\Psi_{x0}(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{y0}(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega y^2/2\hbar} \quad \text{und}$$

$$\Psi_{x1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} x\, e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{y1}(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} y\, e^{-m\omega y^2/2\hbar}$$

Zeigen Sie, dass $\Psi_{x0}\Psi_{y0}$ Eigenfunktion zu L_z ist, $\Psi_{x1}\Psi_{y0}$ bzw. $\Psi_{x0}\Psi_{y1}$ jedoch nicht. Setzen Sie jetzt eine Linearkombination $\Psi_{x1}\Psi_{y0} + \alpha\Psi_{x0}\Psi_{y1}$ an und bestimmen Sie die komplexe Zahl α so, dass dies eine Eigenfunktion von L_z ergibt. (Sie brauchen diese Wellenfunktion hier nicht zu normieren.)

Aufgabe 13: Neutronen im Gravitationsfeld

Auf hinreichend kleiner Skala gehorchen auch mechanische Bewegungen der Quantentheorie. Dies wurde in einem Experiment mit Neutronen beobachtet (Nature Vol.415, p.297 (2002)). Sie fallen im Gravitationsfeld nicht kontinuierlich, sondern in Sprüngen! In dieser Aufgabe berechnen wir Zustände von Teilchen in einer Anordnung wie in dem Experiment. (Auch hier brauchen Sie die Wellenfunktionen nicht zu normieren.)

a) Unser Problem ist eindimensional in z-Richtung. Der Boden ist ein total reflektierender Spiegel. Das Potential lautet

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z \geq 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases}$$

Die Schrödingergleichung für $z > 0$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + mgz\right)\ \varphi(z) = E\ \varphi(z) \tag{1}$$

lässt sich im Impulsraum viel leichter lösen und lautet dort

$$\left(\frac{p_z^2}{2m} + i\hbar mg\frac{\partial}{\partial p_z}\right)\ \tilde{\varphi}(p_z) = E\ \tilde{\varphi}(p_z) \tag{2}$$

Geben Sie die Lösung $\tilde{\varphi}(p_z)$ der Differentialgleichung (2) an. Hinweis: Raten Sie als Lösung eine Exponentialfunktion mit einem Polynom in p_z im Exponenten.

b) Führen Sie die inverse Fouriertransformation aus, um die Wellenfunktion im Ortsraum zu erhalten, d.h. berechnen Sie

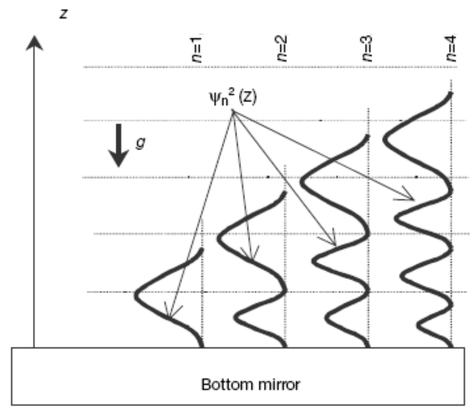
$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z\ \tilde{\varphi}(p_z)\ e^{ip_z z/\hbar}.$$

Ein Ausdruck der Form $Ai(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau\ \ \cos(\omega\tau + \frac{\tau^3}{3})$, die sogenannte Airy-Funktion, darf als Integral stehenbleiben. Finden Sie den Parameter ω in unserem Fall.

c) Beschaffen Sie sich einen Graphen der Airy-Funktion (z.B. Internet Wikipedia, bitte ausdrucken).

d) Wegen $V = \infty$ für $z < 0$ muss $\varphi(0) = 0$ sein, also muss das Argument ω für $z = 0$ so sein, dass Ai dort eine Nullstelle hat. Geben Sie aus dieser Bedingung die vier kleinstmöglichen Werte für E an. (Die Nullstellen lesen Sie aus Ihrem Graphen ab, und für m ist die Masse eines Neutrons einzusetzen.)

e) Die Eigenfunktionen sind "nach oben verschobene" Airy-Funktionen. Geben Sie wiederum durch Ablesen aus ihren Graphen der Airy-Funktion und entsprechendes Umrechnen des Arguments für die ersten vier Zustände jeweils die Höhe z an, in der das Maximum der Wellenfunktion liegt, das am weitesten vom Boden entfernt ist. (Da dies das größte Maximum ist, ist das hier der wahrscheinlichste Wert.)



In der Tat wurden in dem Experiment im Rahmen der Messgenauigkeit unterhalb einer Mindesthöhe deutlich weniger Neutronen registriert als klassisch zu erwarten. Die Neutronen waren dort waagerecht auf eine Fallstrecke geschossen worden.

Aufgabe 14: Wellenpaket im Oszillatorpotential
(schriftlich abzugeben, 8 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Oszillatorpotential

$$V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

(q ist die Ortskoordinate. Die Bezeichnung x kann dann als dimensionslose Ortskoordinate verwendet werden.) Zur Zeit t=0 werde das Teilchen durch die Wellenfunktion

$$\Psi(q,0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(q-\overline{q})^2\right)$$

beschrieben ($\overline{q}$ ist ein beliebiger, aber fester Wert, die Mitte des anfänglichen Wellenpakets).

a) Entwickeln Sie $\Psi(q,0)$ nach den Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators

$$\varphi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) H_n(x) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

mit den Hermite-Polynomen H_n, $x=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}q$ und den zugehörigen Energieeigenwerten $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$. Das heißt, berechnen Sie die Koeffizienten α_n in

$$\Psi(q,0) = \sum_n \alpha_n \, \varphi_n(q).$$

Folgende nützliche Formel dürfen Sie verwenden:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \;\; H_n(x) \;\; \exp\left(-(x-x_0)^2\right) = \sqrt{\pi}\,(2x_0)^n \qquad (*)$$

b) Stellen Sie die zeitabhängige Wellenfunktion $\Psi(q,t)$ auf. Mit der Eigenschaft

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} H_n(x) = \exp\left(-y^2 + 2xy\right)$$

(die rechte Seite ist eine sogenannte erzeugende Funktion, also hier diejenige für die Hermite-Polynome; das wollen wir hier jedoch nicht beweisen) finden Sie eine Darstellung von $\Psi(q,t)$, die keine Summe $\sum_n$ mehr enthält.

c) Berechnen Sie $|\Psi(q,t)|^2$ und bringen dies in eine Form, der man ansieht, dass es sich um eine Verteilung exakt der Form wie $|\Psi(q,0)|^2$ handelt, in der lediglich statt $\overline{q}$ eine zeitlich oszillierende Koordinate steht. Das Wellenpaket ändert seine Form also nicht, und fließt insbesondere auch nicht auseinander. Mit welcher Frequenz bewegt es sich im Raum hin und her?

d) Beweisen Sie die Beziehung (*) aus b) mit vollständiger Induktion und der Darstellung der Hermite-Polynome

$$H_n(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ dürfen Sie als bekannt voraussetzen.