UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 8, Ausgabe 17. 06. 2009
Abgabe am 24. 06. 2009
Besprechung in den Übungen am 24. und 26. 06. 2009

Aufgabe 39 (E): Darstellung in der Basis des ungestörten Systems (5 Punkte)

Als Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators im elektrischen Feld waren in Aufgabe 35 $\varphi_n(\xi) = N_n H_n(\xi - \alpha) e^{-(\xi-\alpha)^2/2}$ zu den Eigenwerten $E'_n = E_n - \frac{\hbar\omega}{2}\alpha^2$ ermittelt worden, wobei hier N_n den Normierungsfaktor, $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ und $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$ bezeichnen. Die Eigenfunktionen des unverschobenen Oszillators lauten wie bekannt $\Psi_n(\xi) = N_n H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Die ersten drei Hermite-Polynome sind: $H_0(y) = 1$, $H_1(y) = 2y$, $H_2(y) = 4y^2 - 2$.

a) (3 P.) Stellen Sie die Eigenfunktionen des Systems mit Feld durch die des Systems ohne Feld dar, ermitteln Sie also die Koeffizienten in

$$\varphi_0(\xi) = a_{00}\Psi_0(\xi) + a_{01}\Psi_1(\xi) + a_{02}\Psi_2(\xi) + \dots \qquad (*)$$

Betrachten Sie die Summe als nach dem Ψ_2-Term abgebrochen, ermitteln Sie also nur die ausgeschriebenen ersten drei Koeffizienten und auch diese nur dargestellt als Anfänge von Potenzreihen. Entwickeln Sie in diesen Rechnungen $e^{-\alpha\xi}$ in eine Potenzreihe bis zum quadratischen Glied in α.

b) (2 P.) Mit den Bezeichnungen $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ und $H' = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x$ seien noch einmal die folgenden bekannten Relationen aufgelistet: $\langle\Psi_n|H|\Psi_n\rangle = E_n$, $\langle\Psi_n|H'|\Psi_n\rangle = E_n$, $\langle\Psi_n|\xi|\Psi_n\rangle = 0$, $\langle\Psi_n|H|\Psi_m\rangle = 0$ für $n \neq m$, $\langle\Psi_n|\xi|\Psi_m\rangle = \delta_{m,n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2}} + \delta_{m,n-1}\sqrt{\frac{n}{2}}$, also $\langle\Psi_n|H'|\Psi_m\rangle = \delta_{m,n+1}\sqrt{\frac{n+1}{2}}\alpha\hbar\omega + \delta_{m,n-1}\sqrt{\frac{n}{2}}\alpha\hbar\omega$ für $n \neq m$.
Die Tatsache, dass die Ψ_n Eigenfunktionen die H sind, lässt sich mit H in Matrixform als die folgende Trivialität schreiben:

$$\begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \text{ usw.}$$

Prüfen Sie jetzt nach, dass

$$\begin{pmatrix} E_0 & \frac{\alpha\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 & \dots \\ \frac{\alpha\hbar\omega}{\sqrt{2}} & E_1 & \alpha\hbar\omega & \dots \\ 0 & \alpha\hbar\omega & E_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \end{pmatrix} = E_0' \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ a_{02} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ist. Terme müssen und können nur bis zur quadratischen Ordnung in α stimmen.

Aufgabe 40 (E): Zwei-Zustands-System mit Kopplung (9 Punkte)

[Literaturtipp: Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I, Kapitel 4.3.]

Bezüglich zweier orthonormierter Basiszustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ zu den Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 sei der Hamiltonoperator als die Matrix $H = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ reell und δ komplex gegeben.

a) (3 P.) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen von H, d.h. die Lösungen $E_\pm$ und $\varphi_\pm$ von $H\varphi_\pm = E_\pm\varphi_\pm$. $E_\pm$ erhalten Sie als Eigenwerte der Matrix H. $\varphi_\pm$ sind dann darzustellen als $\varphi_+ = a_{+1}\Psi_1 + a_{+2}\Psi_2$ bzw. $\varphi_- = a_{-1}\Psi_1 + a_{-2}\Psi_2$, so dass die Vektoren aus den zu ermittelnden komplexen Zahlen a_{ij} Eigenvektoren sind:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{+2} \end{pmatrix} = E_+ \begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{+2} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix} = E_- \begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix}$$

Führen Sie zwei Winkel θ und ϕ ein als $\tan\theta = 2|\delta|/(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ und $\delta^* = |\delta^*|e^{i\phi}$. (In $a_{\pm 1,2}$ sollten am Ende Winkelfunktionen von $\theta/2$ stehen.) Bestimmen Sie die a_{ij} so, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{+1} \\ a_{+2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{-1} \\ a_{-2} \end{pmatrix}$ normiert sind.

b) (1 P.) Nehmen Sie $\Delta = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ als Parameter und zeichnen Sie in ein Diagramm die folgenden vier Funktionen: $f_1(\Delta) = \varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$, $f_2(\Delta) = \varepsilon_2 - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$, $f_3(\Delta) = E_+ - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$, $f_4(\Delta) = E_- - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}$. Für $|\delta|$ dürfen Sie einen beliebigen festen Wert nehmen.

c) (1 P.) Rechnen Sie nach, dass

$$\begin{pmatrix} a_{+1}^* & a_{+2}^* \\ a_{-1}^* & a_{-2}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \delta \\ \delta^* & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{+1} & a_{-1} \\ a_{+2} & a_{-2} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist. (Dies stellte eine unitäre Transformation dar.)
[* bedeutet hier, wie in a), komplex konjugieren.]

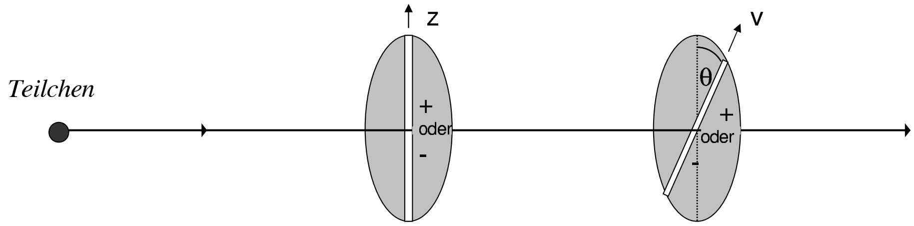
d) (2 P.) Ermitteln Sie auch die Koeffizienten b_{ij} für die umgekehrte Darstellung: $\Psi_1 = b_{1+}\varphi_+ + b_{1-}\varphi_-$, $\Psi_2 = b_{2+}\varphi_+ + b_{2-}\varphi_-$. Bis jetzt hatten wir $\Psi_{1,2}$ und $\varphi_\pm$ als Funktionen nur des Ortes verstanden (und ohne Zeitargument geschrieben sollen sie dies auch weiterhin sein). Zeigen Sie, dass $\Psi_1(t) = b_{1+}\varphi_+ e^{-iE_+t/\hbar} + b_{1-}\varphi_- e^{-iE_-t/\hbar}$ Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung $H\Psi_1(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1(t)$ ist, $\varphi_{+,trial}(t) = a_{+1}\Psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar} + a_{+2}\Psi_2 e^{-i\varepsilon_2 t/\hbar}$ aber nicht. Wie hätte man in letzterer Funktion die Zeitabhängigkeit richtig hinzufügen müssen?

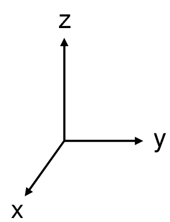
e) (2 P.) Berechnen Sie $|\langle\Psi_1|\Psi_1(t)\rangle|^2$ als Funktion der Zeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass mit der Kopplung zur Zeit t der anfängliche Zustand des ungekoppelten Systems noch erhalten bzw. wiederhergestellt ist. Wie groß darf die Niveaudifferenz Δ höchstens sein, damit zu irgendeiner Zeit mit Sicherheit Zustand Ψ_2 und nicht Ψ_1 gemessen wird?

Aufgabe 41 (E): Messung von Wahrscheinlichkeiten und Projektoren (6 Punkte)

[Literaturtipp: Feynman Lectures III, Kapitel 5; bezieht sich allerdings auf ein 3-Zustands-System, wir haben hier ein 2-Zustands-System.]

Betrachten wir, wie im Stern-Gerlach-Versuch, Teilchen, die zwei mögliche Einstellungen ihres Spins haben. Der Einfachheit halber wollen wir nur Spineinstellungen entlang Achsen senkrecht zur Flugrichtung der Teilchen betrachten.





Die Scheiben mit ausgezeichneter Richtung hier sollen je nach Aufgabenteil nur eine Gedankenhilfe darstellen, in welcher Basis die Wellenfunktion gerade angegeben ist. bzw. eine Messung bedeuten. Es besteht keine vollständige Analogie zu Polarisatoren in der Optik. Für Spin entlang einer Achse kann unterschieden werden, ob er nach "oben" oder "unten" zeigt.

Die Wellenfunktion sei z.B. in Spin-Basis-Funktionen entlang $\vec{z}$ gegeben:

$$|\Psi\rangle = \alpha\,|z+\rangle + \beta\,|z-\rangle \qquad \alpha,\ \beta \text{ komplex},\ |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Das sei der Ausgangszustand für Teilaufgaben a) bis d). Eine Messung des Spins in $\vec{z}$-Richtung mit dem Ergebnis, dass der $|z+\rangle$-Zustand vorliegt, projiziert $|\Psi\rangle$ in den Zustand $|z+\rangle\,\langle z+|\Psi\rangle$ und die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $|\,\langle z+|\Psi\rangle\,|^2$.
Spin-Basis-Funktionen entlang einer anderen, gegen $\vec{z}$ um θ gedrehten Richtung $\vec{v}$ können als

$$|v+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|z+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|z-\rangle \qquad \text{und} \qquad |v-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}\,|z+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,|z-\rangle$$

dargestellt werden. Nehmen Sie diese Projektion mit dem halben Winkel hier ohne Beweis als gegeben hin.

a) (1 P.) Es werde auf der Flugstrecke nur der Spin bezüglich der $\vec{z}$-Richtung gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der $|z+\rangle$-, mit welcher der $|z-\rangle$-Zustand erhalten?

b) (1 P.) Es wird auf der Flugstrecke lediglich der Spin bezüglich der $\vec{v}$-Richtung gemessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man $|v+\rangle$, mit welcher $|v-\rangle$?

c) (1 P.) Jetzt wird zuerst der Spin bezüglich $\vec{z}$, dahinter der Spin bezüglich $\vec{v}$ gemessen. Mit welcher bedingten Wahrscheinlichkeit misst man $|v+\rangle$ bzw. $|v-\rangle$, wenn zuvor $|z+\rangle$ gemessen wurde?

d) (2 P.) Jetzt wird einmal auf der Flugstrecke nur der Spin bezüglich $\vec{x}$ gemessen, zum anderen zunächst der Spin bezüglich $\vec{z}$ und dahinter der Spin bezüglich $\vec{x}$. Auch wenn wir es in der zweiten Situation wissen, wollen wir nur die zwei Fälle unterscheiden, ob in der zweiten Messung

$|x+\rangle$ oder $|x-\rangle$ ermittelt wurde, egal, ob jeweils die erste $|z+\rangle$ oder $|z-\rangle$ ergab. Erhält man dieselben Wahrscheinlichkeiten dafür, $|x+\rangle$ bzw. $|x-\rangle$ zu messen, wenn vorher der Spin bezüglich der $\vec{z}$-Richtung gemessen wurde, wie wenn ausschließlich die Messung bezüglich der $\vec{x}$-Richtung erfolgt?
e) (1 P.) Wenn als Ausgangszustand nicht die obige Superposition von $|z+\rangle$ und $|z-\rangle$, sondern ein Gemisch, worin ein Anteil $|\alpha|^2$ der Wahrscheinlichkeitsdichte dem Zustand $|z+\rangle$ und ein Anteil $|\beta|^2$ dem Zustand $|z-\rangle$ zuzuordnen ist, auf die Flugstrecke gegeben und lediglich eine Spinmessung bezüglich der $\vec{x}$-Richtung durchgeführt wird, was sind dann die Wahrscheinlichkeiten $|x+\rangle$ bzw. $|x-\rangle$ zu messen?

Aufgabe 42 (T): Harmonischer Oszillator III (schriftlich - 8 Punkte)

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\psi_\alpha\rangle = C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = Ce^{\alpha a^\dagger}|0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$ gebildet werden können.
Kohärenten Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $|\psi_\alpha\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator a ist. Vermuten Sie, dass a^+ Eigenfunktionen besitzt?

b) (2 Punkte) Welches $C \in$ R normiert $|\psi_\alpha\rangle$ auf 1? Mit diesem C kann $|\psi_\alpha\rangle$ geschrieben werden als $|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$. Welche bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl $\langle n\rangle = \langle\psi_\alpha|a^+a|\psi_\alpha\rangle$ aus. Berechnen Sie auch die Varianz $(\Delta n)^2$ der Teilchenzahl.

c) (1 Punkt) Wie lautet der zeitabhängige Zustand $|\psi_\alpha(t)\rangle$, wenn $|\psi_\alpha(t=0)\rangle = |\psi_\alpha\rangle$?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie $|\psi_\alpha(t)\rangle$ auf die Form $|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}|\psi_{\alpha(t)}\rangle$.

d) (2 Punkte) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x\rangle(t) = \langle\psi_\alpha(t)|x|\psi_\alpha(t)\rangle.$$

Hinweis: Bringen Sie das Ergebnis auf die Form $\langle x\rangle(t) = 2\lambda|\alpha|\cos(\omega t - \delta)$.

e) (2 Punkte) Berechnen Sie die Unschärfe $(\Delta x)^2(t) = \langle\psi_\alpha(t)|(x - \langle x\rangle(t))^2|\psi_\alpha(t)\rangle$ und (das analog definierte) $(\Delta p)^2(t)$ unter Ausnutzung des Ehrenfest-Theorems. Zeigen Sie damit, dass $|\psi_\alpha\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d.h.

$$\Delta x(t)\Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$

Aufgabe 43 (T): Getriebenes Zwei-Niveau-System (Spin-Resonanz)

(schriftlich - 12 Punkte + 3 Zusatzpunkte)

Diese Aufgabe beschäftigt sich mit der Grundlage der Kernspinresonanz (NMR) sowie der Elektronenspinresonanz (ESR), die wichtige Methoden sind, um z.B. die magnetischen Eigenschaften von Festkörpern zu untersuchen.
Ein Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen befinde sich in einem zeitabhängigen äußeren Magnetfeld

$$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} B_1 \cos \omega t \\ B_1 \sin \omega t \\ B_0 \end{pmatrix}.$$

Das Magnetfeld bestehe also aus einem konstanten Anteil B_0 in z-Richtung und einem rotierenden Feldanteil in der x-y-Ebene.
Der Hamiltonoperator lautet $H(t) = -\gamma\, \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}$ mit dem Spinoperator $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, wobei die kartesischen Komponenten $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$ in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ durch die Pauli-Matrizen dargestellt werden. γ ist das gyromagnetische Verhältnis ($\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{s}$).

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der zeitabhängige Hamilton-Operator H in dieser Basis gegeben ist durch

$$H = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}.$$

b) (1 Punkt) Der zeitabhängige Zustandsvektor $|\psi(t)\rangle$ für ein zeitabhängiges Zwei-Niveau-System läßt sich allgemein bzgl. der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ in der Form $|\psi(t)\rangle = c_+(t)|+\rangle + c_-(t)|-\rangle$ schreiben. Formulieren Sie die zeitabhängigen Bewegungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten $c_+(t)$ und $c_-(t)$.

c) (3 Punkte) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle \equiv |+\rangle$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $|c_-(t)|^2 \equiv |\langle -|\psi(t)\rangle|^2$, dass sich das System zum Zeitpunkt $t \geq 0$ im Zustand $|-\rangle$ befindet?

Hinweis: Überführen Sie das Differentialgleichungssystem für $c_-(t)$ und $c_+(t)$ in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $c_-(t)$ und lösen diese mit dem Ansatz $c_-(t) = Ae^{i\lambda t}$. Das Ergebnis lautet:

$$|c_-(t)|^2 = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \qquad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_1^2}.$$

d) (2 Punkte) Unter welcher Bedingung wird die Übergangswahrscheinlichkeit $|c_-(t)|^2$ groß und für welchen Wert von ω tritt eine sogenannte Resonanz auf? Wie lautet $|c_-(t)|^2$ genau an der Resonanzstelle? Skizzieren Sie $|c_-(t)|^2$ für den Resonanzfall und z.B. für $\omega = 3\omega_0$.

Alternativ lässt sich das Problem mit Hilfe des Zeitentwicklungsoperator lösen.

e) (3 Zusatzpunkte) Beweisen sie die Formel

$$e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = 1 \cos \alpha + i \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\alpha} \sin \alpha,$$

und zeigen Sie, dass jede unitäre Transformation im Zwei-Niveau-System geschrieben werden kann als $e^{i\alpha_0}\, e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\sigma}}$, wobei α_0 eine (irrelevante) Phase beschreibt.

f) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass sich durch die Transformation $|\psi(t)\rangle = e^{-i\sigma_z \omega t/2} |\psi'(t)\rangle$ für den Zeitentwicklungsoperator $U'(t)$ ergibt: $U'(t) = e^{(i/\hbar)H't}$, wobei H' zeitunabhängig ist. $U'(t)$ ist hierbei definiert durch $|\psi'(t)\rangle = U'(t) |\psi'(0)\rangle$.

Hinweis : Zeigen und benutzen Sie

$$
\begin{aligned}
e^{i\omega t\sigma_z/2}\sigma_x e^{-i\omega t\sigma_z/2} &= \sigma_x \cos(\omega t) - \sigma_y \sin(\omega t) \\
e^{i\omega t\sigma_z/2}\sigma_y e^{-i\omega t\sigma_z/2} &= \sigma_y \cos(\omega t) + \sigma_x \sin(\omega t).
\end{aligned}
$$

g) (2 Punkte) Berechnen Sie aus f) die Übergangswahrscheinlichkeit $|\langle\downarrow|U'(t)|\uparrow\rangle|^2 = |\langle\downarrow|\psi'(t)\rangle|^2$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe c).

Hinweis: Die in e) gezeigte Formel könnte hilfreich sein.