UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 3, Ausgabe 13. 05. 2009
Abgabe am 06. Mai 2009
Besprechung in den Übungen am 13. und 15. 05. 2009

Aufgabe 12 (E): Eigenschaften des Photons (10 Punkte)

a) (3 Punkte) *Impuls des Photons und Strahlungsdruck:*
Da ein Photon den Impuls $h\nu/c$ hat, wird bei Absorption oder Reflexion von Licht Impuls auf das entsprechende Objekt übertragen. Das nennt man *Strahlungsdruck*.
Vergleichen Sie die Gravitationskraft, mit der die Sonne die Erde anzieht, mit der Kraft, mit der das von der Sonne ausgesandte Licht die Erde wegdrückt. Die *Solarkonstante*, also die Lichtleistung pro der Sonne zugewandter Einheitsfläche im Abstand der Erde von der Sonne beträgt 1,367 kW/m^2. Die Erde hat eine sogenannte *Albedo* von 0,3. D.h. 70% des Lichts werden absorbiert, 30% reflektiert. Nehmen Sie für die vereinfachende Abschätzung hier an, dass alles Licht von der Sonne bei einer einzigen Frequenz ν ausgestrahlt wird. Vernachlässigen Sie für die Reflexion die gekrümmte Oberfläche der Erde, d.h. nehmen Sie an, dass Reflexion immer in Richtung zurück zur Sonne erfolgt. Weitere Zahlenangaben: Gravitationskonstante γ=6,67·10^{-11} N m^2 kg^{-2}, Sonnenmasse M_S=1,989·10^{30} kg, Erdmasse M_E=5,977·10^{24} kg, Abstand Erde-Sonne = 1 Astronomische Einheit (AE) = 1,496·10^{11} m, (mittlerer) Erdradius R_E=6,368·10^6 m, Lichtgeschwindigkeit c=2,9979·10^8 m/s.

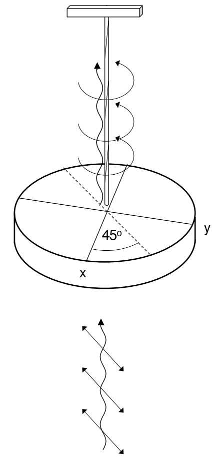
b) *Drehimpuls des Photons*
Die Skizze zeigt die einfachste Variante eines Experiments zum Nachweis des Photon-Drehimpulses. Ein $\lambda/4$-Plättchen, welches unterschiedliche Brechungsindices für in x- bzw. in y-Richtung linear polarisiertes Licht aufweist ($n_x \neq n_y$), ist an einem Torsionsfaden aufgehängt.

i) (1,5 Punkte) Wie dick muss das Plättchen sein, damit einfallendes monochromatisches Licht, das unter 45° zur x-Achse linear polarisiert ist, das Plättchen als zirkular polarisiertes Licht verlässt? n_x und n_y seien bekannt für die verwendete Frequenz. Geben Sie die kleinste mögliche Dicke an (Formel).

ii) (2,5 Punkte) Ein Photon hat den Drehimpuls $\hbar$, der in oder entgegengesetzt der Flugrichtung zeigt. Ein einzelnes Photon ist also zirkular polarisiert. (Linear polarisiertes ist dann aus gleich vielen Photonen mit Drehimpuls in die eine und die entgegengesetzte Richtung zusammengesetzt.) Im Versuch wirkt durch die Umwandlung von linear in zirkular polarisiertes

Licht ein mechanisches Drehmoment auf das Plättchen und den Faden. Berechnen Sie dieses (Zahl) für den Fall, dass das Licht eine Wellenlänge von 1,2μm hat und eine Intensität von 7W einfällt. Sie müssen zunächst die Leistung durch die Energie $h\nu$ eines Photons teilen, um zu ermitteln, wieviele Photonen pro Zeiteinheit das Plättchen passieren.

Sie dürfen hier annehmen, dass (im Durchschnitt) jedes Photon vor dem Plättchen noch keinen Drehimpuls hat, aber dahinter alle $\hbar$ haben und zwar alle in dieselbe Richtung ausgerichtet. Oder Sie nehmen an, dass die Hälfte der Photonen schon die richtige zirkulare Polarisation hat, diesen nichts geschieht, jedoch bei der anderen Hälfte die zirkulare Polarisation umgedreht wird. Haben Sie also mehr die Zustände vorher und nachher im Auge als das, was im Plättchen geschieht. Wie hier Wellen- und Teilchenbild in Einklang zu bringen sind, kann in den Übungen diskutiert werden.



c) *Masse des Photons*
In der heutzutage gängigen physikalischen Theorie hat das Photon keine Ruhemasse. Mit Hypothesen, dass es eventuell doch eine sehr kleine Ruhemasse hat, können Experimente bzw. astronomische Messungen dann natürlich nur obere Schranken für diese ermitteln. Eine solche ist $m_0 \leq 6 \cdot 10^{-16}$ eV/c^2. (Rechnen Sie den in dieser ungewohnten Einheit angegebenen Wert zunächst einmal in kg um.)

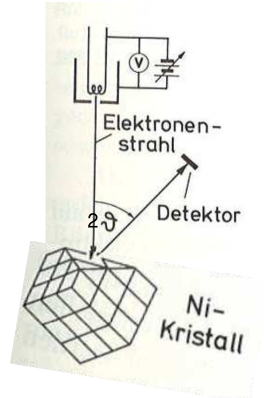
i) (1,5 Punkte) Nehmen Sie den angegebenen Grenzwert hier einmal als die Ruhemasse des Photons an. Gehen Sie von der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für massebehaftete Teilchen aus, also $E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$, und leiten Sie eine Formel für die Gruppengeschwindigkeit $v_{gr} = d\omega/dk$ als Funktion der Wellenzahl k bzw. der Wellenlänge λ her. $E = \hbar\omega$, $p = \hbar k$ und $k = 2\pi/\lambda$ dürfen Sie verwenden.

ii) (1,5 Punkte) Wie groß wäre die Flugzeitdifferenz zwischen blauem Licht ($\lambda_B = 4000$Å) und rotem Licht ($\lambda_R = 8000$Å), auf einer Distanz von 1000 Lichtjahren? 1 Lichtjahr (ly) = 9,461$\cdot 10^{15}$m. Sie sollten $\frac{1}{v_R} - \frac{1}{v_B} \approx \frac{v_B - v_R}{c^2}$ verwenden. Ausdrücke für v_R und v_B müssen dann so entwickelt werden, dass die Differenz per Taschenrechner zahlenmäßig darstellbar ist.

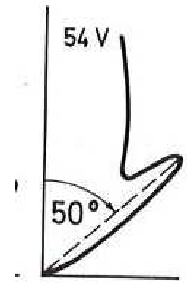
Aufgabe 13 (E): Wellennatur von Teilchen (10 Punkte)

Neben Interferenzerscheinungen bei Durchgang durch Doppelspalte zeigt sich der Wellencharakter von Teilchen bei Beugung an Kristallen, wie das Experiment von Davisson und Germer gezeigt hat. Dies kann dann umgekehrt im Debye-Scherrer-Verfahren auch zur Untersuchung der Kristalle ausgenutzt werden. (Nicht verwirren lassen: Die Begriffe "Beugung" und "Streuung" werden hier synonym gebraucht.) Obwohl mitunter das Davisson-Germer-Experiment als Durchstrahlen dünner Folien beschrieben wird, handelt es sich um Reflexionen. Die Folien sind dann nämlich polykristallin, bestehen aus zufällig ausgerichteteten kleinen Kristallen, an deren Oberflächen die Elektronen reflektiert werden.

a) (2 Punkte) Betrachten wir zunächst nur *eine* Kristalloberfläche. Die durch regelmäßige Anordnung der Atome im Kristall definierten Ebenen sind hier wie teildurchlässige Spiegel zu behandeln, und es genügt nur die obersten beiden zu betrachten. Konstruktive Interferenz entsteht, wenn die Bragg-Bedingung $2d\sin\theta = n\lambda$ erfüllt ist. Unter diesen Winkeln θ wird dann ein Maximum in der reflektierten Intensität beobachtet.($\vartheta = 90° - \theta$)



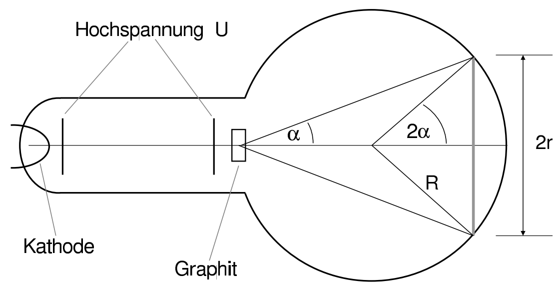
in Polardiagramm aufgetragene
gemessene Reflexion z.B.:



Für die eingestrahlten Teilchen ist natürlich die deBroglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$ einzusetzen. Für die Elektronen in dieser Aufgabe ist die Energie-Impuls-Beziehung relativistisch aufzustellen. Berechnen Sie für Elektronen der kinetischen Energie 1eV, 100eV, 1000eV und 100keV jeweils die deBroglie-Wellenlänge sowie den Winkel θ, für den die Bragg-Bedingung mit n=1 an einem Nickelkristall mit d=2,15Å erfüllt ist.

b) Das im Folgenden diskutierte Experiment weist durch die Beugung von Elektronen an Graphit deren Wellencharakter nach bzw. bestimmt die Gitterkonstanten des Graphits. Durch Glühemission werden in einem evakuierten Glaszylinder freie Elektronen erzeugt und durch Anlegen einer Hochspannung beschleunigt. Auf dem kugelförmigen Leuchtschirm (R=65mm) entsteht ein Beugungsbild aus Ringen.

i) (0,5 Punkte) Die kinetische Energie, die die Elektronen durch das Durchlaufen der Hochspannung bekommen, ist hier nicht-relativistisch (m: Ruhemasse) auszurechnen: $eU = \frac{1}{2}mv^2$. Wie bekannt gilt dann $p = h/\lambda$. Stellen Sie den Zusammenhang von λ zu U her.

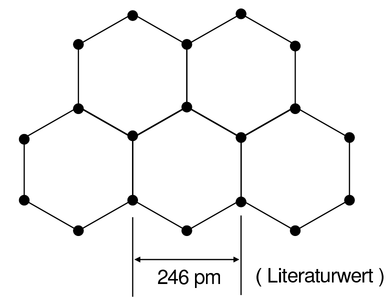


ii) (1,5 Punkte) Wie hängt der Winkel α aus der Versuchsanordnung mit dem Winkel θ aus der Bragg-Bedingung $2d\sin\theta = n\lambda$ zusammen? Es werden nur erste Ordnungen (n=1) gemessen. Zeigen Sie, dass sich die Gitterabstände zu $d = 2R\lambda/r$ ergeben. Es handelt sich bei α um kleine Winkel, so dass Sie $r/R = \sin(2\alpha) \approx 2\sin\alpha$ verwenden können sowie eine analoge Beziehung mit θ.

iii) (3 Punkte) Nebenstehende Tabelle gibt Messwerte für die *Durchmesser* zweier Ringe bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen. (Werte für Ring 1 gehören natürlich zum selben Netzebenenabstand d_1 für alle U, so wie Werte von Ring 2 immer auf dasselbe d_2 zurückzuführen sind.) Erweitern Sie die Tabelle um Spalten für λ der Elektronen und jeweils errechneten Werten d_1 und d_2. Bilden Sie für letztere Mittelwerte aus Messungen bei allen U.

U	Ø Ring 1	Ø Ring 2
3 kV	47,6 mm	26,8 mm
4 kV	41,4 mm	22,8 mm
5 kV	37,7 mm	20,7 mm
6 kV	34,2 mm	19,3 mm
7 kV	31,3 mm	17,2 mm
8 kV	29,4 mm	16,7 mm

iv) (1 Punkt) Sie sollten in iii) Werte von etwa 121pm und 218pm für d_1 bzw. d_2 erhalten haben. Finden Sie anhand der nebenstehenden Zeichnung Netzebenen, deren Abstände diesen Werten entsprechen. (Der Abstand der wabenartigen Graphitebenen in der dritten Dimension ist viel größer und spielt hier keine Rolle.) Abweichungen von einigen Pikometern dürfen Sie bei der Zuordnung zulassen.



c) (2 Punkte) Argumentieren Sie, warum beim Rutherford-Versuch das Streumuster nicht auch durch die Kristallstruktur des beschossenen Materials beeinflusst wurde, sondern dort die Größe der einzelnen Atomkerne entscheidend war. Berechnen Sie dazu die deBroglie-Wellenlänge der α-Teilchen mit kinetischer Energie 12,75MeV; vergleichen Sie hier die Ergebnisse, die man mit nicht-relativistischer bzw. relativistischer Energie-Impuls-Beziehung erhält, und rechnen Sie auch die Geschwindigkeit des α-Teilchens aus. Vergleichen Sie dann die erhaltene deBroglie-Wellenlänge mit den Atomabständen in Gold oder Aluminium, die (je nachdem, welche Gitterebenen man betrachtet) etwa 3-4Å betragen.

Aufgabe 14 (T): Wellenpaket (schriftlich - 12 Punkte)

Gegeben sei eine Gaußverteilung der Wellenzahlen k:

$$a(k) = Ce^{-ikx_0}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}} \qquad (\sigma > 0).$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \,\mathrm{d}k = 1$ gilt.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum aus

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(k)e^{i(kx-\omega t)}\mathrm{d}k$$

und der Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Hinweis: Es ergibt sich

$$\psi(x,t) = \frac{C}{\sqrt{2b(t)}}e^{ik_0c(t)}e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b(t)}}$$

mit $b(t) = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{i\hbar}{2m}t, r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t$ und $c(t) = x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{2m}t$.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $|\psi(x,t)|^2$ und zeigen Sie, dass das Maximum des Wellenpaketes am Ort $x_0 + v_g t$ liegt. $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}$ ist hierbei die Gruppengeschwindigkeit. Betrachten Sie auch die Breite des Wellenpaketes und beschreiben Sie das *Zerfließen des Wellenpaketes*. d) (1 Punkt)

Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$ unabhängig von der Zeit ist. Was bedeutet das?

e) (2 Punkte) Berechnen Sie den *Erwartungswert*

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)^* x \psi(x,t) \mathrm{d}x$$

des Ortes x im Zustand $\psi(x,t)$ sowie $\langle x^2 \rangle$.

f) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Varianz (Unschärfe) einer beliebigen Funktion $A(x)$ gilt :

$$(\Delta A)^2 := \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2 .$$

g)(2 Punkte) Berechnen Sie damit die Ortsunschärfe Δx und die Impulsunschärfe Δp wobei für den Impuls gilt $p = -i\hbar\partial_x$.

h) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation* $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ erfüllt ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 15 (T): Galilei-Invarianz der Schrödingergleichung (schriftlich - 5 Punkte)

a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung eines freien Teilchens

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x,t)$$

invariant unter der folgenden *Galilei-Transformation* ist

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x - vt \\ y &\rightarrow y' = y \\ z &\rightarrow z' = z. \end{aligned}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\phi(\mathbf{x}', t)} \psi'(\mathbf{x}', t)$$

um zu zeigen, dass mit geeigneter Wahl von $\phi(\mathbf{x}', t)$ für $\psi'(\mathbf{x}', t)$ gilt

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' \psi'.$$

Wie lauten die Gleichungen, die $\phi(\mathbf{x}', t)$ erfüllen muß? Wie lautet die allgemeine Lösung $\phi(\mathbf{x}', t)$?

b) (1 Punkt) Diskutieren Sie das Ergebnis für den Spezialfall der ebenen Wellen.

Aufgabe 16 (T): Energie von Materiewellen (schriftlich - 3 Punkte)

Wie ändert sich die Wellenfunktion eines Teilchens, wenn man zur potentiellen Energie eine Konstante addiert (stationärer Fall)? Was lässt sich damit über die physikalische Relevanz der Frequenz einer Materiewelle aussagen?