Universität Konstanz
Fachbereich Physik
Priv. Doz. Dr. Peter Keim

Ausgabedatum: 05.12.2016
Abgabedatum: 12.12.2016
Besprechung 14.12.2016

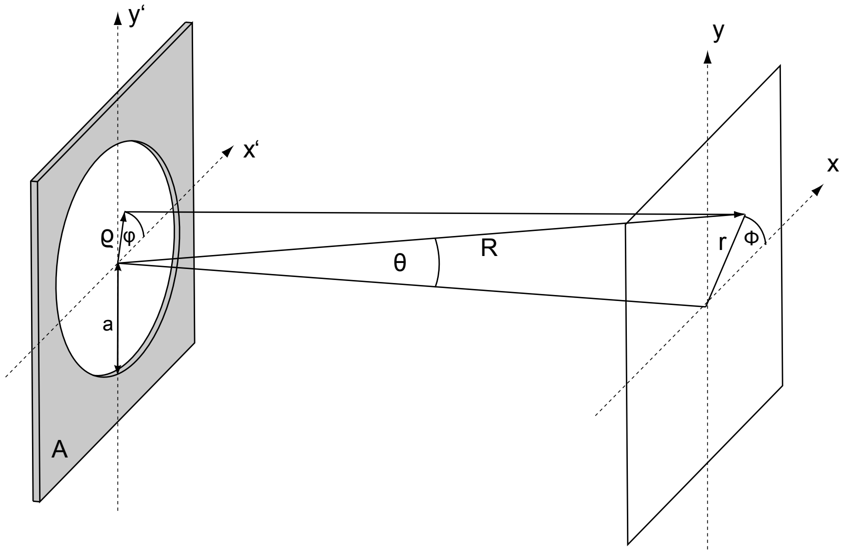
ÜbungsgruppenleiterInnen: A. Grupp, A. Liehl, J. Schmidt, J. Bühler
J. Roller, L. Siedentop, M. Fischer

Übungen zu Integrierter Kurs III (Experimentalteil)

Blatt 07

Aufgabe 1: Beugung an einer Kreisblende (schriftlich abzugeben) **(10 Punkte)**

Die Beugung an kreisförmigen Öffnungen ist von großer praktischer Bedeutung, da in vielen optischen Instrumenten kreisförmige Blenden und Linsen eingesetzt werden. Betrachten Sie daher eine Kreisblende mit einem Radius a (siehe Abbildung). Es falle eine ebene Welle mit dem Wellenvektor k senkrecht auf die Apertur A.



(a) Zeigen sie, dass die Intensitätsverteilung $I(\Theta)$ des gebeugten Lichtes im Fernfeld in Abhängigkeit des Beugungswinkels Θ folgende Form annimmt:

$$I(\Theta) = I(0) \left[\frac{2J_1(ka \sin \Theta)}{ka \sin \Theta} \right]^2$$

Zeigen sie hierfür zuerst, dass für die gebeugte Wellenamplitude E folgender Ausdruck gilt:

$$E(\Theta) \propto \int\limits_{\varrho=0}^{a} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \varrho \exp\left[-ik\varrho \sin \Theta \cos(\varphi - \Phi)\right] \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi$$

Hinweis: J_n nennt man die Besselfunktion n-ter Ordnung und es gilt:

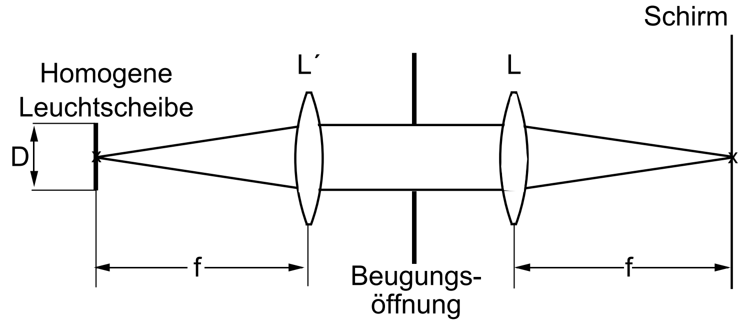
$$J_n(u) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int\limits_{\phi_0}^{2\pi+\phi_0} \exp\left[i(n\tau + u\cos\tau)\right] \mathrm{d}\tau$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(u^n J_n(u)\right) = u^n J_{n-1}(u)$$

(b) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung $I(\Theta)$ für $a = \lambda$ und $a = 10\lambda$.

(c) Berechnen Sie, wie sich der Winkel des ersten Intensitätsminimums Θ_1 mit dem Blendenradius a und der Wellenlänge λ ändert. Die Nullstellen der Besselfunktion finden Sie in der gängigen Literatur.

(d) Eine homogen leuchtende Scheibe ($\lambda = 500\,\mathrm{nm}$) wird über zwei Linsen gleicher Brennweite ($f = 2\,\mathrm{m}$) auf einen Schirm abgebildet (siehe folgende Skizze). Argumentieren Sie qualitativ den Einfluss der Beugungsöffnung auf das Aussehen des Bildes auf dem Schirm. Welchen Durchmesser hat die Leuchtscheibe nach der Abbildung? Der Durchmesser der Beugungsöffnung sowie der Scheibe sei 5 mm.

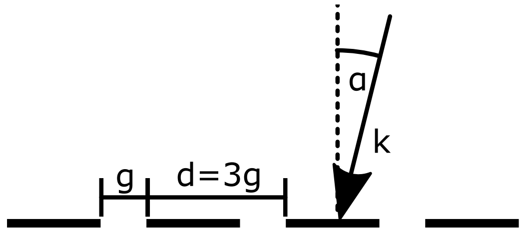


(e) Überlegen Sie qualitativ, wie das Schirmbild aus Teilaufgabe (d) aussieht, wenn statt des monochromatischen Lichtes weißes Licht auf die Kreisblende fällt. Welche andere Apertur würde das selbe Fraunhofer-Beugungsbild besitzen?

(f) Nach dem Rayleigh-Kriterium gelten zwei Lichtpunkte als aufgelöst, wenn der Abstand der beiden Hauptmaxima nicht geringer ist als der Abstand vom Maximum einer Beugungsfigur zu ihrem ersten Minimum. Wie groß muss der Durchmesser einer Teleskopöffnung mindestens sein, um einen Doppelstern aufzulösen, dessen Entfernung zur Erde 10 Lichtjahre beträgt und dessen Komponenten von der Erde aus betrachtet einen Abstand von 100 Millionen Kilometern haben? Das Teleskop arbeitet bei einer Wellenlänge von $\lambda = 500\mathrm{nm}$
Hinweis: Rechnen Sie in der Kleinwinkelnäherung.

Aufgabe 2: Beugung an einem Gitter (1 Kreuzchen)

(a) Gegen sei folgendes, unendlich fortgesetztes, Transmissionsgitter, welches von einer ebenen Welle mit Wellenvektor k unter einem Winkel von $\alpha = 2°$ beleuchtet wird.



Die Gitterkonstante ist $d = 3\mu$m und die Länge des transparenten Bereiches beträgt $g = 1\mu$m. Leiten Sie aus einfachen Überlegungen die Winkel β_m ab, unter denen Beugungsmaxima beobachtbar sind. Berechnen Sie die Winkel bis einschließlich des vierten Beugungsmaxima für alle $\lambda \in [400\,\text{nm}, 600\,\text{nm}, 800\,\text{nm}]$.

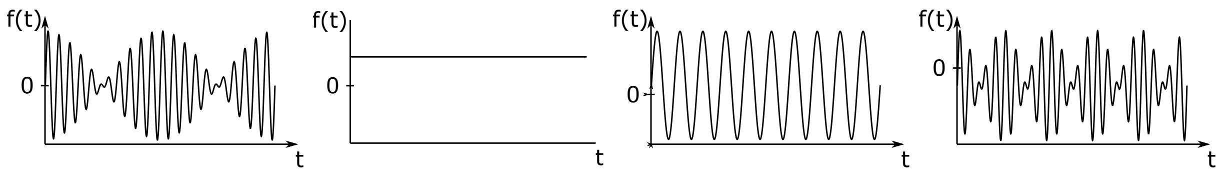
(b) Erklären Sie was der Blazewinkel bei Reflektionsgittern ist und bestimmen Sie wie groß der optimale Blazewinkel θ_b für die in a) genannten Wellenlängen ist?
Hinweis: Verwenden Sie eine einfache, anschauliche Bedingung aus der geometrischen Optik, um die geeigneten Winkel zu finden.

(c) Mit Hilfe eines Gittermonochromators kann man einzelne spektrale Anteile aus weißem Licht herausfiltern. Erklären Sie dessen Aufbau. Von welchen Parametern hängt die Auflösung des Monochromators ab? Was ist der Unterschied zu einem Gitterspektrometer mit einer CCD-Kamera?

Aufgabe 3: Zeitliche und räumliche Fouriertransformationen (1 Kreuzchen)

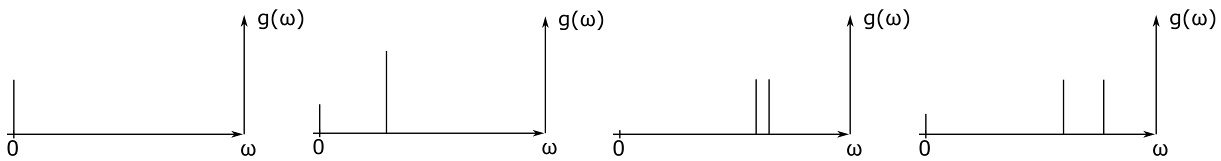
(a) Wie sieht das Beugungsbild eines eindimensionalen Gitters, also einer periodischen Anordnung von Schlitzen, aus? Argumentieren Sie über das Faltungstheorem der Fouriertransformation.

(b) Finden Sie zu jedem Zeitverlauf die passende Fouriertransformation. Begründen Sie ihre Wahl.



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 1: Zeitverläufe



(a) (b) (c) (d)

Abbildung 2: Fouriertransformationen

(c) Finden Sie zu jeder Blendenfunktion die passende Fouriertransformation. Begründen Sie ihre Wahl.

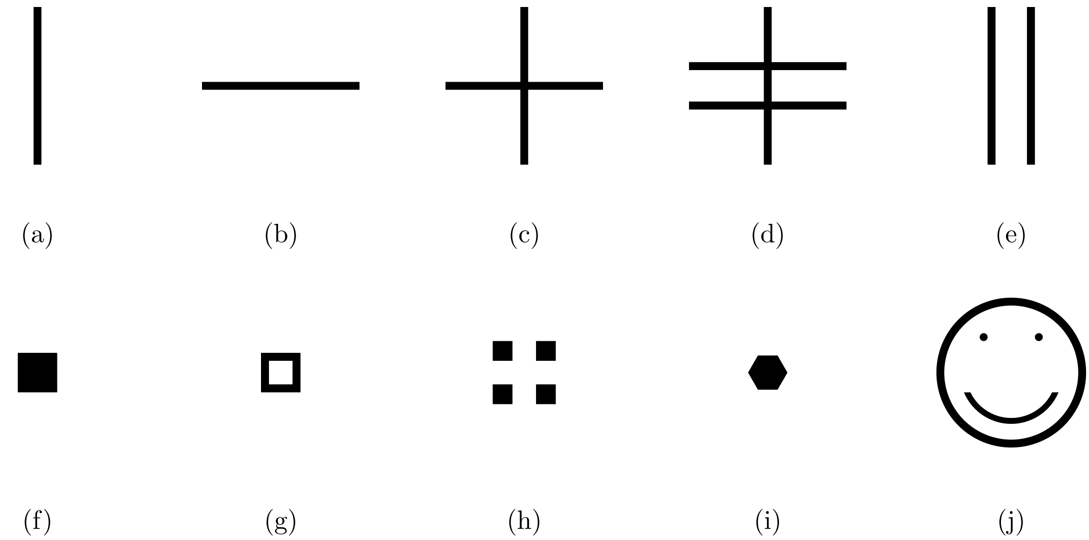


Abbildung 3: Blendenfunktionen

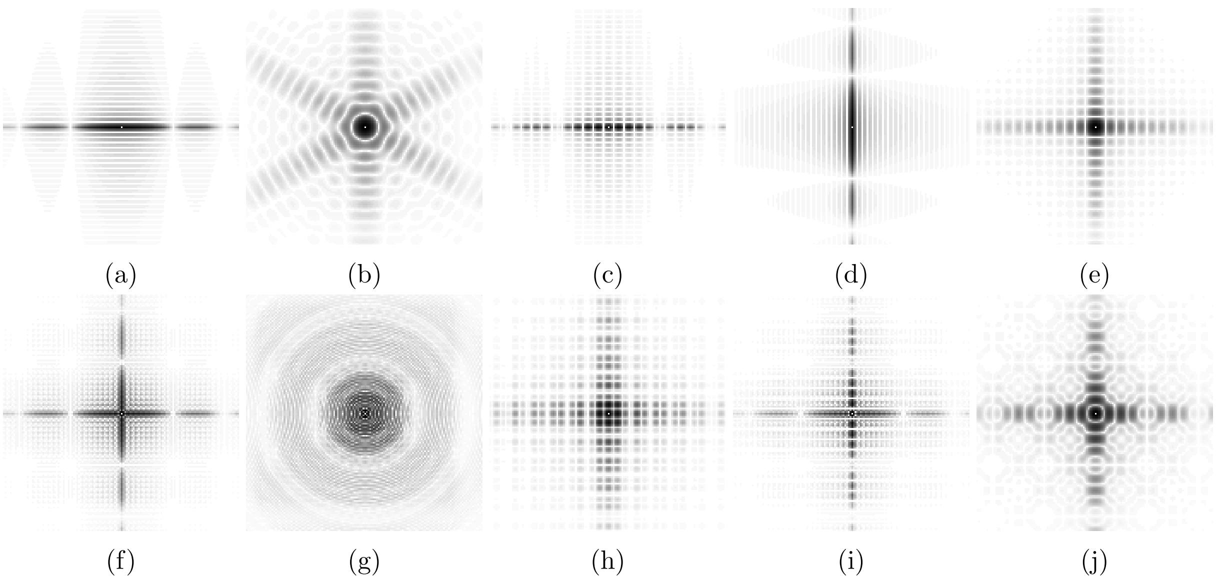


Abbildung 4: Fouriertransformationen