

Übungen zur Vorlesung Festkörperphysik WS 07/08

Prof. G. Maret

Blatt 6, Besprechung am 6./7.12.07

1. Aufgabe: Pauliprinzip in der Astrophysik

Das Modell der freien Fermionen spielt nicht nur in der Festkörperphysik eine entscheidende Rolle, sondern findet auch in der Astrophysik Anwendung um die Existenz von Weißen Zwergen und Neutronensternen zu erklären.

a) Gegeben ist die Masse $M_{\odot} = 2 \times 10^{30}\text{kg}$ und der $R_{\odot} = 7 \times 10^8\text{m}$ unserer Sonne. Schätzen Sie die Zahl der Elektronen in der Sonne ab.

b) In etwa 5 Milliarden Jahren wird der Wasserstoffvorrat unserer Sonne aufgebraucht sein und die Sonne geht nach einem Zwischstadium als Roter Riese, dessen Radius mit dem Bahnradius der Erde vergleichbar ist, in einen Weißen Zwerg ($M \approx 0.5 \cdot M_{\odot}$, $R \approx 10^7\text{m}$) über. Da Weiße Zwerge eine Temperatur von etwa 10^7K besitzen sind die Heliumatome vollständig ionisiert und die Elektronen können näherungsweise als frei Elektronen betrachtet werden. Berechnen sie die Fermi-Energie und die Fermi-Temperatur des Elektronengases. Handelt es sich dabei um ein entartetes Elektronengas?

c) Die Energie eines Elektron im relativistischen Grenzfall $E \gg mc^2$ hängt mit dem Wellenvektor k über $E \cong pc = \hbar kc$ zusammen. Zeigen Sie, dass die Fermi-Energie in diesem Grenzfall durch $E_F \cong \hbar c(3\pi^2 n)^{1/3}$ ($n = \text{Elektronendichte}$) abgeschätzt werden kann.

d) Der Druck des Elektronengases im Innern eines Weißen Zwerges kann den auf dem Weißen Zwerg lastenden Gravitationsdruck nur dann kompensieren, wenn dieser eine Masse von weniger als 1.4 Sonnenmassen (Chandrasekhar-Grenze) hat. Besitzt ein ausgebrannter Stern eine höhere Masse, so wird sich der sterbende Stern stattdessen in einen Neutronenstern mit Radius von etwa 15km umwandeln. Leiten Sie mit Hilfe der in Teil 3 hergeleiteten Abschätzung der Elektronenenergie eine Beziehung für die Grenzmasse (Chandrasekhar-Masse) her.

e) Bei der Entstehung eines Neutronensternes werden die Atome so stark komprimiert, dass der inverse Neutronzerfall $p^+ + e^- \rightarrow n + \nu$ zusammen mit einer starken Kontraktion energetisch vorteilhaft wird, wobei das Verhältnis aus Radius des Neutronensterns zu seinem ursprünglichen Radius als Stern gerade dem Verhältnis aus Atomkern zu Atom entspricht. Die Neutronen im Neutronenstern können wieder als Fermi-Gas angenähert werden. Was erwarten Sie aufgrund der bislang angestellten Überlegungen für die Entwicklung eines Sternes mit $M \gg M_{\odot}$?

2. Zustandsdichten des Fermigases in n-Dimensionen

Die Dispersionsrelation eines Systems freier Elektronen wird gegeben durch die isotrope Beziehung

$$E(k) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad .$$

a) Berechnen sie die Zustandsdichten als Funktion des Impulses und der Energie

$$D(\vec{k})d^n k = D(E)dE$$

für eindimensionale, zweidimensionale und dreidimensionale Elektronensysteme oder für n-dimensionale Elektronensysteme.

b) Stellen sie die Zustandsdichte $D(E)dE$ zeichnerisch als Funktion des Wellenvektors für die Fälle $n = 1, 2, 3$ dar.

3. Druck und Kompressibilität des Fermigases

a) Zeigen Sie mit Hilfe des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik, dass ein Fermigas mit der Fermi-Energie E_F auch am absoluten Nullpunkt der Temperatur einen Fermi-Druck besitzt. Das Ergebnis lässt sich in der Form $p_0 V = \frac{2}{3} U_0$ schreiben, wobei U_0 die innere Energie ist.

b) Die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

gibt Auskunft über die relative Änderung des Volumens eines Systems, welche eine infinitesimale Änderung eines Druckes p bei konstanter Temperatur bewirkt. Zeigen Sie, dass die Kompressibilität eines freien Elektronengases gegeben ist durch

$$\kappa_T = \frac{3}{5p_0} = \frac{9V}{10U_0} .$$

c) Schätzen Sie den Beitrag des freien Elektronengases zur Kompressibilität für Lithium ab. Wie gross ist hier der Nullpunktsdruck p_0 ?

(Dichte $\rho = 0,53 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, Atomgewicht = $6.9 m_u$, $m_u = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $E_F = 4,7 \text{ eV}$, experimentell ermittelte Gesamtkompressibilität von Li: $9 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{N}$)