Integrierter Kurs Physik IV
Exp.-Teil, Atom und Quantenphysik
SoSe 11

Universität Konstanz

Prof. G. Maret, Dr. P. Keim

Übungsblatt Nr. 5,

Ausgabedatum: Mo. 16.05.2011
Abgabedatum: Fr. 20.05.2011 in der Vorlesung
Besprechung: Mi. 25.05.2011 in den Übungsgruppen

Aufgabe 8: Zeitentwicklung von Zuständen im Potentialtopf

Zur Zeit $t = 0$ regen wir die beiden untersten Zustände im Potentialtopf der Breite $2a$ mit unendlich hohen Wänden kohärent an, d.h. für die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ gilt

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)).$$

a) Stellen Sie durch Lösen der zeitabhängigen Schrödingergleichung und mit Hilfe der bekannten Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ für den Potentialtopf die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ auf.

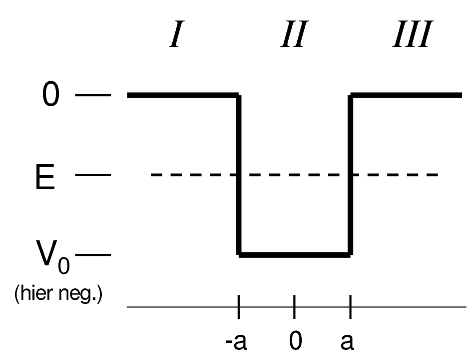
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x,t)|^2$. Mit welcher zeitlichen Periode T ändert sich diese? Skizzieren Sie $|\Psi(x,t)|^2$ als Funktion von x für $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$ und $t = 3T/4$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $< x > (t)$.

d) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $< H >$ und $< H^2 >$ und damit $\Delta E = \sqrt{< H^2 > - < H >^2}$.

Aufgabe 9: Eindimensionaler, endlich tiefer Potentialtopf
(schriftlich, 9 Punkte)

a) Betrachten Sie zunächst Energien im Potentialtopf. Machen Sie einen Ansatz für die Wellenfunktion in den Bereichen $x \leq -a$, $-a \leq x \leq a$ und $x \geq a$ mit oszillierendem bzw. exponentiell abklingendem Charakter. Bezeichnen Sie die Wellenzahl für $-a \leq x \leq a$ mit k und die Abklingkonstante außerhalb mit κ und leiten Sie aus den Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion eine Gleichung her, die k und κ erfüllen müssen. Drücken Sie diese Gleichung auch mit E und V_0 aus.



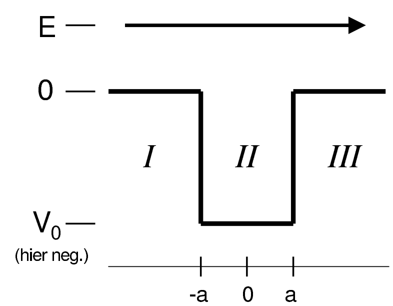
Argumentieren Sie anhand einer Skizze zweier Funktionen und deren Schnittpunkten, dass nur diskrete Lösungen für E existieren. Wieviele Lösungen gibt es mindestens? (Bitte dazuschreiben, ob E von 0 oder vom Boden des Potentialtopfs aus gezählt wird; beides ist erlaubt.)

Hilfe: Wenn $e^{i\varphi} = \left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)^2$ ist (φ,a,b reell), gibt es die beiden Wurzeln $e^{i\varphi/2} = \frac{a+ib}{a-ib}$ und $e^{i\varphi/2+i\pi} = \frac{a+ib}{a-ib}$ und weiterhin ist $\frac{\varphi}{4} = \arctan\frac{b}{a}$ bzw. $\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{b}{a}$.

b) Zeigen Sie für die zu den in a) gefundenen Energiewerten gehörigen Wellenfunktionen, dass diese (bis auf einen globalen Phasenfaktor) reell sind und zudem entweder symmetrisch, also $\psi(x) = \psi(-x)$, oder antisymmetrisch, d.h. $\psi(x) = -\psi(-x)$.

c) Betrachten Sie weiterhin den Potentialtopf der Breite $2a$ und TiefeV_0, jedoch jetzt Energien, die darüber liegen.

Setzen Sie die Wellenfunktion in den drei Bereichen an und berechnen Sie hier für positive E die Transmission in Abhängigkeit von der Energie. Argumentieren Sie, dass die Transmission eine unendliche Anzahl von Maxima besitzt (Resonanzen) - Sie brauchen *nicht* auszurechnen, bei welchen Energiewerten diese genau liegen. Welchen Wert nimmt die Transmission an allen Resonanzen an?



(Hinweis: Sie können die Tatsache ausnutzen, dass $x + 1/x$ für reelle positive x immer größer oder gleich 2 ist.)