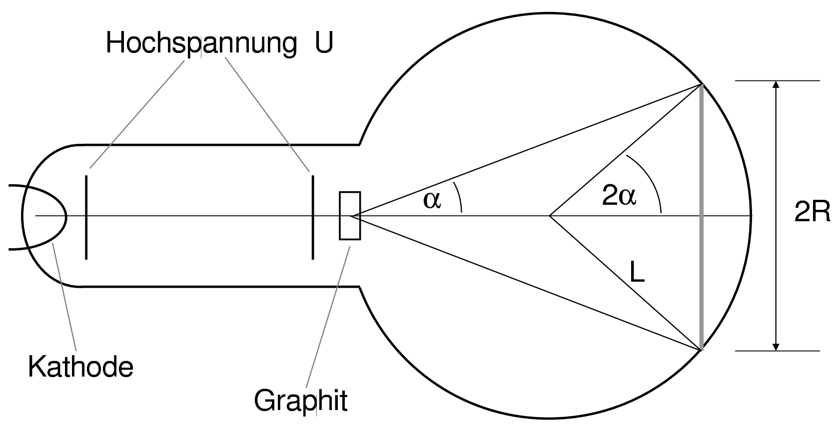
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)
Raum P 1007, Tel. 4712
E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)
Raum P 807, Tel. 5256
E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de

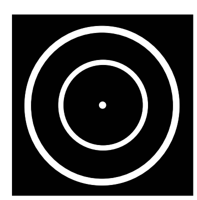
Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010
Übungsblatt 3, Ausgabe 03. 05. 2010
Abgabe am 10. und 12. 05. 2010
Besprechung in den Übungen am 12. und 14. 05. 2010

Aufgabe 13 (E): Elektronenbeugung



Folgendes Experiment weist durch die Beugung von Elektronen an einem Graphitkristall deren Wellencharakter nach. Die Gitterkonstanten des Graphit werden bestimmt.

Durch Glühemission werden in einem evakuierten Glaszylinder freie Elektronen erzeugt und durch Anlegen einer Hochspannung beschleunigt. Auf dem kugelförmigen Leuchtschirm (L=65mm) entsteht ein Beugungsbild. Polykristallines Graphit besteht aus vielen Einzelkristallen, die beliebig orientiert sind. Daher sieht man Ringe.

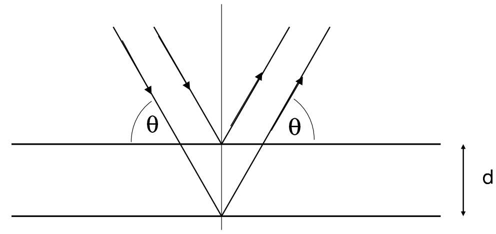


a) Die kinetische Energie, die die Elektronen durch das Durchlaufen der Hochspannung bekommen, ist hier nicht-relativistisch (m: Ruhemasse) auszurechnen: $eU = \frac{1}{2}mv^2$. Über den Impuls $p = mv = h/\lambda$ erhält man die zugehörige Wellenlänge. Stellen Sie den Zusammenhang von λ zu U her.

b) Wie hängt der Winkel α aus der Versuchsanordnung mit dem Winkel θ aus der Bragg-Bedingung $2d \sin\theta = n\lambda$ zusammen? Es werden nur erste Ordnungen (n=1) gemessen. Zeigen Sie, dass sich die Gitterabstände zu

$$d = \frac{2L\lambda}{R}$$

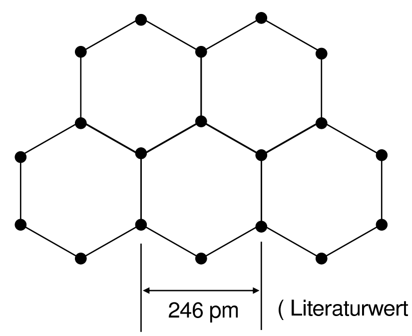
ergeben. Es handelt sich bei α um kleine Winkel, so dass Sie $\frac{R}{L} = \sin(2\alpha) \approx 2\sin\alpha$ verwenden können.



c) Nebenstehende Tabelle gibt Messwerte für die *Durchmesser* zweier Ringe bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen. (Werte für Ring 1 gehören natürlich zum selben Netzebenenabstand d_1 für alle U, so wie Werte von Ring 2 immer auf dasselbe d_2 zurückzuführen sind.)
Erweitern Sie die Tabelle um Spalten mit λ der Elektronen und jeweils errechneten Werten d_1 und d_2. Bilden Sie für letztere Mittelwerte aus Messungen bei allen U.

U	Ø Ring 1	Ø Ring 2
3 kV	47,6 mm	26,8 mm
4 kV	41,4 mm	22,8 mm
5 kV	37,7 mm	20,7 mm
6 kV	34,2 mm	19,3 mm
7 kV	31,3 mm	17,2 mm
8 kV	23,4 mm	16,7 mm

d) Sie sollten in c) Werte von etwa 128pm und 228pm erhalten haben. Welchen Netzebenenabständen im Graphit sind diese zuzuordnen? (Der Abstand der wabenartigen Graphitebenen in der dritten Dimension ist viel größer und spielt hier keine Rolle.) Die Messwerte für die Gitterabstände in diesem Versuch bei den noch kleinen Beschleunigungsspannungen hier kommen gegenüber Referenzwerten etwas zu groß heraus (Sie dürfen bis um die 20pm Abweichung bei einer Zuordnung erlauben).



Aufgabe 14 (E): Wie schnell wird der Kaffee kalt? (schriftlich, 6 Punkte)

Als Physiker ist man in der glücklichen Lage, die Antwort auf diese essentielle Alltagsfrage präzise ausrechnen zu können. Betrachten Sie eine Thermoskanne als Zylinder mit Durchmesser 10 cm und Höhe 25 cm. Vernachlässigen Sie den Boden und den Deckel, rechnen Sie nur mit der Zylindermantelfläche. Der Flächenunterschied zwischen der inneren und äußeren Zylindermantelfläche des Isoliervakuums sei ebenfalls vernachlässigbar. Die (vorgewärmte) Kanne wird mit 350 K heißer Flüssigkeit (nehmen Sie Wasser an, Wärmekapazität 18,0 cal mol^{-1} K^{-1}, 1 cal = 4,184 J) vollgefüllt. Nach welcher Zeit ist soviel thermische Energie abgegeben, dass die Wassertemperatur nur noch 310 K beträgt? Rechnen Sie zunächst mit ungehinderter Energieabgabe einer Oberfläche (einwandige Kanne ohne Isoliervakuum, außen Vakuum statt Luft) über Wärmestrahlung nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz.
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man die Begrenzung des Isoliervakuums durch die Außenwand hinzunimmt? Die Außenwand (auf 300 K) sendet ebenfalls Wärmestrahlung nach innen aus, die der innere Bereich mit Flüssigkeit vollständig absorbiert (schwarzer Körper). Die Außenwand reflektiere keine Strahlung nach innen und werde nicht aufgeheizt, sondern (durch die Umgebung) auf 300 K gehalten.

Hinweis zum Rechnen:
$$\int \frac{dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \frac{a+x}{|a-x|} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a}$$

Aufgabe 15 (E): Photonenzahl und Energiedichte

Nach dem Planckschen Strahlungsgesetz beträgt die spektrale Energiedichte eines schwarzen Strahlers der Temperatur T pro Wellenlängenintervall:

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k_B T\lambda} - 1} \qquad (*)$$

Über alle Wellenlängen lässt sich dies zur Gesamtenergiedichte $\frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{15h^3c^3}$ geschlossen aufintegrieren. Über begrenzte Wellenlängenbereiche muss (*) numerisch integriert werden (das geht für die Aufgabe auch relativ grob, man kann sich mit Handzeichnungen und Taschenrechner behelfen; MATLAB, MATHEMATICA o.ä. sind hier natürlich von Vorteil).

Berechnen Sie bzw. machen Sie eine Abschätzung für die Energie im sichtbaren Spektralbereich (400nm bis 750nm) in einem Volumen von 1cm^3 bei $T = 300$ K (an der Erdoberfläche) und bei $T = 6000$ K (Photosphäre der Sonne). Drücken Sie die Energien auch als Bruchteil der gesamten Strahlungsenergie in demselben Volumen bei der jeweiligen Temperatur aus.

Bei welcher Wellenlänge liegt bei der jeweiligen Temperatur das Maximum der Energiedichte?

Berechnen Sie auch für beide Temperaturen die Anzahl der im sichtbaren Spektralbereich vorhandenen Photonen für das angegebene Volumen.

Aufgabe 16(T): Die Einsteinsche Herleitung des Strahlungsgesetzes

Zur Herleitung der spektralen Energiedichte $\rho(\nu)$ in einem Hohlraum stellte Einstein 1917 die Idee in den Raum, dass die Wände des Hohlraumes selbst nur quantisiert absorbieren und emittieren können. Damit konnte er auf elegante Weise die Planck'sche Strahlungsformel ableiten.

a) Betrachten Sie zwei Zustände (1) und (2) mit den Energien $E_2 > E_1$ und den Besetzungswahrscheinlichkeiten N_2 und N_1.
Stellen Sie eine Gleichung für die Änderung der Besetzungswahrscheinlichkeiten der beiden Zustände auf, indem Sie die folgenden Prozesse berücksichtigen:

- (induzierte) Absorption: Proportionalitätsfaktor B_{12}
- induzierte Emission: Proportionalitätsfaktor B_{21}
- spontane Emission: Proportionalitätsfaktor A

Die induzierten Prozesse sind proportional zur spektralen Energiedichte $u(\nu, T)$. Die Proportionalitätskonstanten A, B_{12} und B_{21} sind die sog. *Einstein-Koeffizienten*. Die Energiedifferenz $E_2 - E_1$ wird in Quanten $h\nu$ abgegeben/aufgenommen.

b) Für den stationären Fall erhält man eine Gleichung für das Verhältnis $\frac{N_2}{N_1}$, welches im thermischen Gleichgewicht der Boltzmann-Verteilung

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

entsprechen muss. g_1 und g_2 stehen dabei für die Entartungsgrade der beiden Zustände.

Stellen Sie das Ergebnis nach $u(\nu, T)$ um.

c) Für den Grenzfall $T \to \infty$ erhalten Sie einen Zusammenhang zwischen B_{12} und B_{21}, da $u(\nu, T)$ hier divergiert. Durch Vergleich mit dem Rayleigh-Jeans-Gesetz (welcher Grenzfall?) bekommt man einen Zusammenhang zwischen A und B_{12}. Durch Einsetzen sollte sich dann die Plancksche Strahlungsformel ergeben:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

Aufgabe 17(T): Das Gauß'sche Wellenpaket (schriftlich - 12 Punkte)

Gegeben sei eine Gaußverteilung der Wellenzahlen k:

$$a(k) = Ce^{-ikx_0}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}} \qquad (\sigma > 0).$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \, \mathrm{d}k = 1$ gilt.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum durch Fourier-Rücktransformation

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(kx - \omega t)} \, \mathrm{d}k$$

und der Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Hinweis: Es ergibt sich

$$\psi(x, t) = \frac{C}{\sqrt{4\pi b(t)}} e^{ik_0 c(t)} e^{-\frac{(x - r(t))^2}{4b(t)}}$$

mit $b(t) = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{i\hbar}{2m}t$, $r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t$ und $c(t) = x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{2m}t$.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $|\psi(x, t)|^2$ und zeigen Sie, dass das Maximum des Wellenpaketes am Ort $x_0 + v_g t$ liegt. $v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}$ ist hierbei die Gruppengeschwindigkeit. Betrachten Sie auch die Breite des Wellenpaketes und beschreiben Sie das *Zerfließen des Wellenpaketes*.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 \, \mathrm{d}x$ unabhängig von der Zeit ist. Was bedeutet das?

e) (2 Punkte) Berechnen Sie den *Erwartungswert*

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t)^* x \psi(x, t) \, \mathrm{d}x$$

des Ortes x im Zustand $\psi(x, t)$ sowie $\langle x^2 \rangle$.

f) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Varianz (Unschärfe) einer beliebigen Funktion $A(x)$ gilt:

$$(\Delta A)^2 := \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2 .$$

g) (2 Punkte) Berechnen Sie damit die Ortsunschärfe Δx und die Impulsunschärfe Δp wobei für den Impuls gilt $p = -i\hbar\partial_x$.

h) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation* $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ erfüllt ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?