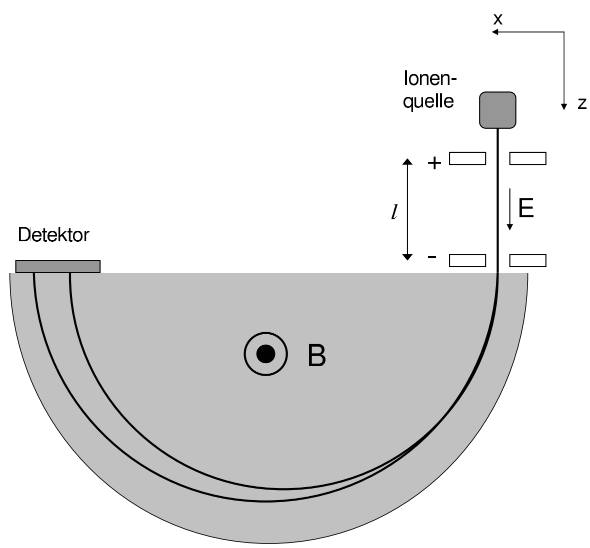
UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Elke Scheer (Experimentalphysik)
Raum P 1007, Tel. 4712
E-mail: elke.scheer@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Guido Burkard (Theoretische Physik)
Raum P 807, Tel. 5256
E-mail: Guido.Burkard@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs - Sommersemester 2010

Übungsblatt 2, Ausgabe 26. 04. 2010
Abgabe am 03. und 05. 05. 2010
Besprechung in den Übungen am 05. und 07. 05. 2010

Aufgabe 7 (E): Massenspektrometer (schriftlich, 6+2 Punkte)

a)

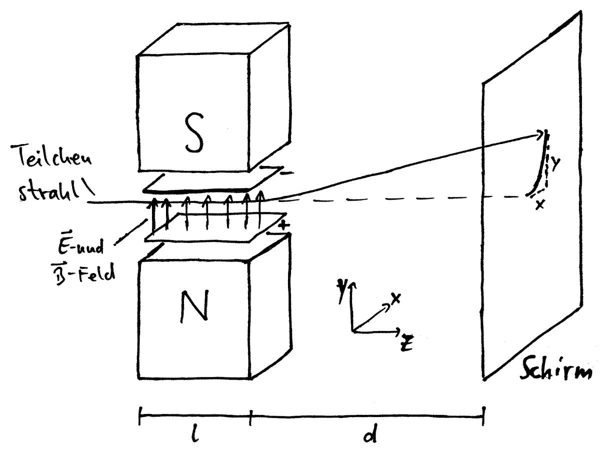


In der Vorlesung haben Sie einen Massenspektrometeraufbau kennengelernt, in dem Ionen (einfach geladen) zunächst in einem elektrischen Feld beschleunigt werden (bei Eintritt haben sie Geschwindigkeit Null) und anschließend in einem dazu senkrecht stehenden magnetischen Feld Halbkreisbahnen durchlaufen. Leiten Sie her, dass der Radius solch einer Halbkreisbahn

$$r = \sqrt{\frac{2mEl}{e}}\frac{1}{B}$$

beträgt, wobei m die Masse des Ions und e die Elementarladung ist.

b) Betrachten Sie jetzt einen Aufbau, wo die Teilchen (einfach geladene Ionen) auf einer Länge l parallele $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder durchlaufen (Kaufmann-Spektrometer). Dadurch werden sie sowohl beschleunigt als auch abgelenkt. Detektion erfolgt auf einem im Abstand d platzierten Schirm. Die Ionen sollen hier bereits mit einer Anfangsgeschwindigkeit v in den Feldbereich eintreten. Diese darf nicht zu gering sein, muss jedoch keineswegs für alle Teilchen gleich sein.



Zeigen Sie, dass von einem Strahl polyenergetischer Teilchen identischer Masse m (Ladung e) auf dem Schirm eine Parabel $y = Ax^2$ abgebildet wird. Nehmen Sie im Feld eine Geschwindigkeit $v \approx v_z = const.$ an, berechnen Sie damit die Ablenkungen $x(v)$ und $y(v)$ am Schirm und eliminieren Sie v. Das Ergebnis lautet:

$$y(x) = \frac{m}{e}\frac{E}{B^2}(ld + \frac{l^2}{2})^{-1}x^2$$

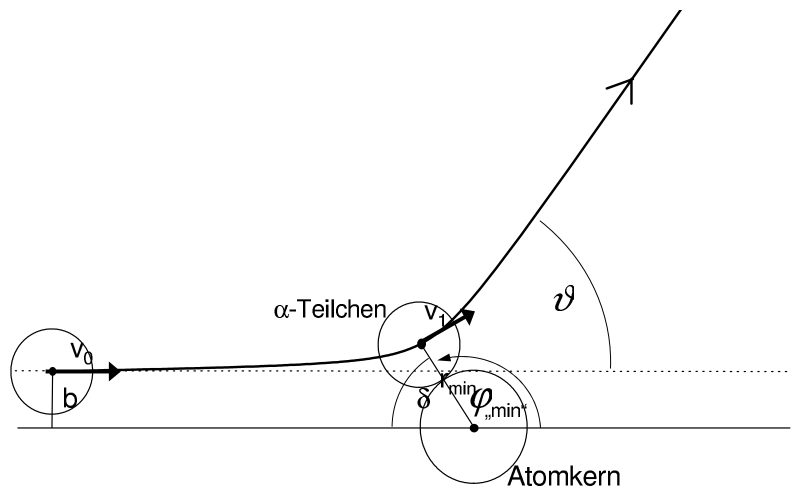
c) Berechnen Sie für den Aufbau aus a) zum einen den Abstand auf dem Detektor, in dem Wasserstoffionen H^+ und Molekülionen H_2^+ voneinander auftreffen und zum anderen den Abstand, in dem Ionen der Isotope ^{16}O und ^{18}O aufkommen. Hier sei $|\vec{E}|$=5000V/m, l=40cm, $|\vec{B}|$=1Tesla. (Die Masse der Ionen sei als Massenzahl mal Protonenmasse hinreichend genau berechnet.)
Berechnen Sie für dieselben vier Ionensorten jeweils die Positionen x und y, wo diese im Aufbau von b) auf den Schirm treffen. Hier sei $|\vec{E}|$=5000V/m, l=4cm, $|\vec{B}|$=0,01Tesla, d=20cm und die Ionen treten bereits mit einer kinetischen Energie von 1000eV in den Feldbereich ein.
d) Zusatzaufgabe: Im Aufbau aus b) ergibt sich bei sehr schnellen Teilchen aufgrund eines relativistischen Effekts eine Abweichung von der Parabelform für den Auftreffort von Teilchen gleicher Masse. Die Vereinfachung $v \approx v_z$ (konstant) werde beibehalten. Ersetzen Sie lediglich in den Ausdrücken $x(v)$ und $y(v)$ die Masse m durch die relativistische Masse γm und lösen Sie wiederum durch Eliminieren von v nach $y(x)$ auf. Das Ergebnis lautet:

$$y(x) = b\sqrt{1 - \frac{1}{c^2x^2/a^2 + 1}(\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{c^2})} \qquad \text{mit} \qquad a = \frac{eB}{m}(ld + \frac{l^2}{2}) \quad \text{und} \quad b = \frac{eB}{m}(ld + \frac{l^2}{2})$$

Zeichnen Sie diese Funktion zusammen mit der Parabel aus b) für Elektronen in einem Zahlenbereich von Längen, wo der Unterschied erkennbar ist. (Damit ganz klar ist, was die Variablen bedeuten: m: Ruhemasse, v: Anfangsgeschwindigkeit bei Eintritt in den Feldbereich, x, y: Position auf dem Schirm, c: Lichtgeschwindigkeit, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.)

Aufgabe 8 (E): Kernradius aus Rutherford-Streuung

Beim Rutherfordstreuexperiment wird beobachtet, dass für Ablenkwinkel ϑ größer einem bestimmten Streuwinkel das Ergebnis (gemessene Teilchenzahl als Funktion von ϑ) von dem für reine Coulombstreuung von zwei Punktteilchen erwarteten abweicht. Große Streuwinkel ϑ entsprechen kleinen Stoßparametern b. Mit Kenntnis der Größe der gestreuten α-Teilchen lässt sich aus dem genannten kritischen Streuwinkel eine obere Abschätzung für die Atomkerngröße des untersuchten Materials gewinnen. (Die Kernladungszahl Z sei bekannt.) Wir wollen annehmen, dass sich α-Teilchen und Kern im Scheitelpunkt der Bahn gerade berühren.



a) Leiten Sie den minimalen Abstand r_{min} im Scheitelpunkt der Bahn als Funktion des Streuwinkels ϑ und der anfänglichen kinetischen Energie E_0 des α-Teilchens her. Zur Herleitung gibt es verschiedene Wege, im Folgenden zwei Vorschläge.
1.Benutzen Sie die in der Vorlesung hergeleitete Bahnkurve $r(\varphi)$:

$$\frac{1}{r} = A\cos(\varphi + \delta) - \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha v_0^2 b^2}$$

A und b sind über $\sin\delta = -\frac{1}{bA}$, $\tan\delta = \frac{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha v_0^2 b}{2Ze^2}$, $\tan\delta = \cot\frac{\vartheta}{2}$ und $b = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha v_0^2}\cot\frac{\vartheta}{2}$ explizit einzusetzen. Das für den Scheitelpunkt einzusetzende spezielle $\varphi_{''min''}$ ist sofort zu sehen.
2. Betrachten Sie außer dem Scheitelpunkt der Bahn den Punkt im Unendlichen vor der Streuung. Stellen Sie Energie- und Drehimpulserhaltung auf. Den zwischen Streuwinkel und Stoßparameter bekannten Zusammenhang $b = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 m_\alpha v_0^2}\cot\frac{\vartheta}{2}$ müssen Sie auch hier verwenden.

b) Bei einem Rutherfordexperiment an einer Al-Folie (Z=13) hatten die α-Teilchen anfangs eine kinetische Energie von E_0=12,75MeV. Ab einem Ablenkwinkel von ϑ=54° wichen die Messungen vom Coulomb-Profil ab. Der Radius der α-Teilchen beträgt $2\cdot 10^{-15}$m. Wie groß ist also höchstens der Radius der Al-Kerne?

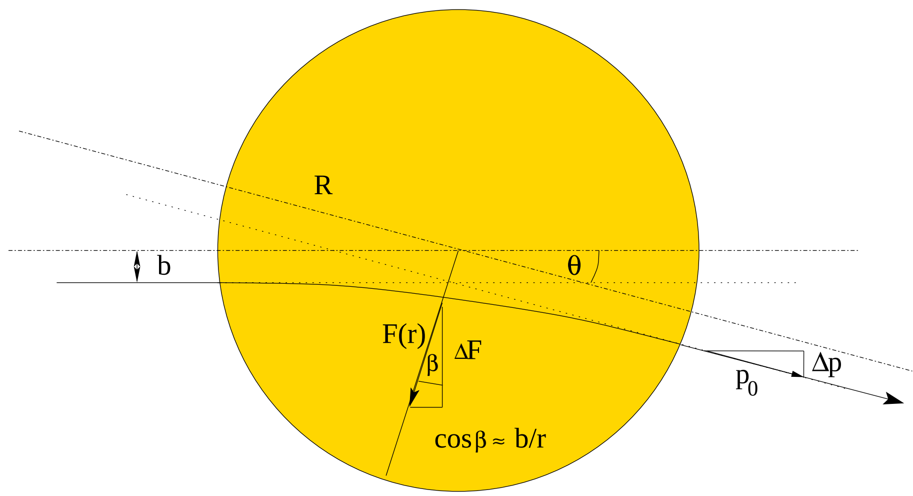
Aufgabe 9 (E): Photo-Effekt

a) Metallisches Cäsium wird mit grünem Licht (λ=532nm) bzw. blauem Licht (λ=470nm) bestrahlt. Als kinetische Energie der ausgelösten Photoelektronen wird 0,19eV bzw. 0,50eV gemessen. Ermitteln Sie aus diesen Daten das Plancksche Wirkungsquantum h und die Austrittsarbeit von Cäsium (der Wert der Elementarladung e ist hier als bekannt anzunehmen).

b) Zeigen Sie mithilfe der relativistischen Energie- und Impulserhaltung, dass der Photoeffekt nicht an freien Elektronen möglich ist, dass also ein freies Elektron nicht ein Photon vollständig absorbieren kann, um dann mehr kinetische Energie zu haben.

Aufgabe 10(T): Thomson Atommodell

Zeigen Sie, dass die Streuung von geladenen α-Teilchen an einer homogen geladenen Kugel ("Thomson Modell") nur zu kleinen Streuwinkeln führt. Berechnen Sie dazu den Ablenkwinkel aus der Impulsänderung beim Durchflug durch eine homogen geladene Kugel ($Q = Ze$) in Abhängigkeit vom Stoßparameter b für $b \leq R$.



Bestimmen Sie damit den maximalen Ablenkwinkel für die Streuung von α-Teilchen mit der kinetischen Energie von 1 MeV an einem Gold-Atom ($Z = 79$, $R = 1$ Å).

Hinweise: Vernachlässigen Sie die Ablenkung außerhalb der geladenen Kugel (neutrales Atom). Innerhalb der Kugel ist das elektrische Feld gegeben durch

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}.$$

Aufgabe 11(T): Potentialstreuung und Wirkungsquerschnitt

Wir möchten die Streuung an einem Potential der Form $V(r) = \alpha/r^2$ ($\alpha > 0$) untersuchen.

a) Leiten Sie den folgenden Ausdruck für den Perihelwinkel in einem beliebigen Potential $V(r)$ her, indem Sie die Energieerhaltung (Hamiltonfunktion) und Drehimpulserhaltung in Polarkoordinaten verwenden

$$\delta = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L/r^2 \mathrm{d}r}{\sqrt{2m(E - V(r)) - L^2/r^2}}.$$

b) Drücken Sie den Drehimpuls L und die Energie E durch die asymptotische Geschwindigkeit v_∞ und den Stossparameter b aus. Bestimmen Sie den minimalen Abstand r_{min} in Abhängigkeit von L und E. Berechnen Sie damit den Ablenkwinkel θ, so dass sich folgender Ausdruck ergibt:

$$\theta = \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\alpha/mb^2v_\infty^2}}\right).$$

c) Bestimmen Sie damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus der Formel

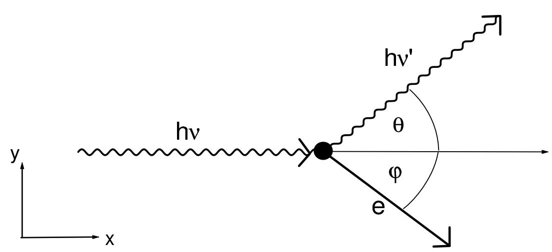
$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b(\theta)}{\sin(\theta)} \left|\frac{\mathrm{d}b(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right|.$$

Hinweis: Es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi^2\alpha(\pi - \theta)}{E\sin(\theta)\theta^2(2\pi - \theta)^2}.$$

d) Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Rutherfordschen Streuformel indem Sie auf dem differentiellen Wirkungsquerschnitt bei $\theta = \pi$ normieren und beide Abhängigkeiten skizzieren.

Aufgabe 12(T): Der Compton-Effekt (1922) (schriftlich - 6 Punkte)



Der Compton-Effekt (Arthur Holly Compton, 1922) beschreibt die inelastische Streuung eines Photons an einem Elektron. Vor dem Stoß sei das Elektron in Ruhe. Die Winkel, unter denen Photon und Elektron nach dem Stoß davonfliegen, seien mit θ bzw. φ bezeichnet.
Das Photon gibt einen Teil seiner Energie an das Elektron ab, weshalb die Wellenlänge des gestreuten Lichts größer ist als die des einfallenden Photons. Für das Gesamtsystem gelten die Energie- und Impulserhaltung.

a) (4 Punkte) Leiten Sie den Ausdruck für die Wellenlängenänderung

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$$

her. λ bezieht sich auf das Photon vor dem Stoß, λ' auf das Photon nach dem Stoß. $\lambda_C = \frac{h}{m_0 c}$ (mit m_0 der Ruhemasse des Elektrons) heißt Comptonwellenlänge. (Aufpassen, falls man den Zahlenwert nachschlägt, denn mitunter ist $\frac{\hbar}{m_0 c}$ angegeben.)
Es sind die relativistische Energie- und Impulserhaltung (vektoriell) anzusetzen. Ein Photon der Frequenz ν hat die Energie $h\nu$ und den Impuls(betrag) $h\nu/c$ (Warum ?).

b) (2 Punkte) Ein Photon mit der Energie 10^4 eV (Röntgenstrahlung) wird an einem ruhenden Elektron gestreut und unter einem Winkel von $\theta = 60°$ abgelenkt. Geben Sie die Wellenlänge des einfallenden und des gestreuten Photons an. Berechnen Sie auch die kinetische Energie des Elektrons nach dem Stoß und den Winkel φ unter dem es davon fliegt.