UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 9, Ausgabe 24. 06. 2009
Abgabe am 01. 07. 2009
Besprechung in den Übungen am 01. und 03. 07. 2009

Aufgabe 44 (E): Eigenfunktionen von Drehimpulsoperatoren (10 Punkte)

a) (1 P.) Stellen Sie sich als Vorbereitung alle Elemente der Matrix

$$\begin{pmatrix} \partial r/\partial x & \partial r/\partial y & \partial r/\partial z \\ \partial\vartheta/\partial x & \partial\vartheta/\partial y & \partial\vartheta/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{pmatrix}$$

zusammen. (r, ϑ, φ) bedeuten hierin Kugel-, (x, y, z) kartesische Koordinaten.

b) (2 P.) Drücken Sie jetzt $L_x = -i\hbar(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y})$, $L_y = -i\hbar(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z})$ und $L_z = -i\hbar(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$ in Kugelkoordinaten aus. Benutzen Sie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\vartheta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ etc.
Zeigen Sie weiterhin, dass mit den Definitionen $L_+ = L_x + iL_y$ und $L_- = L_x - iL_y$ gilt:

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}(\frac{\partial}{\partial\vartheta} + i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi}) \quad \text{und} \quad L_- = -\hbar e^{-i\varphi}(\frac{\partial}{\partial\vartheta} - i\cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\varphi})$$

$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ sollte sich schon vorher ergeben haben.

c) (1 P.) Rechnen Sie nach, dass L_+ angewendet auf die Funktion $F_l^l(\vartheta, \varphi) = c_l e^{il\varphi}(\sin\vartheta)^l$ Null ergibt. c_l ist eine Normierungskonstante. Bestimmen Sie deren Betrag so, dass $\int_0^{2\pi} d\varphi\ \int_0^{\pi} d\vartheta\ |F_l^l(\vartheta, \varphi)|^2 = 1$ ist.

d) (2 P.) Überprüfen Sie durch Einsetzen für L_+ und L_-, dass $\frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+) + L_z^2$ dem Drehimpulsbetrag $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ wie man es erwartet entspricht. (Benutzen Sie hierbei *nicht* bereits eine Darstellung der Produkte L_+L_- und L_-L_+ durch L^2 und L_z, sondern lediglich die Definitionen aus b).)
Mit den expliziten Formeln aus b) zeigen Sie nun:

$$L^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} - \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = -\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) - \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

e) (4 P.) Ausgehend von der Funktion F_l^l aus c), dem Wissen, dass es zu einem l $2l+1$ Funktionen F_l^m gibt (wobei m von $-l$ bis l läuft), die Eigenfunktionen zu L^2 und L_z sind, sowie dass sich F_l^{m-1} als $(\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)})^{-1}L_-F_l^m$ aus F_l^m gewinnen lässt, berechnen Sie explizit alle Funktionen dieser Art zu $l=0$, $l=1$ und $l=2$. (Was hier F genannt ist, sind die Kugelflächenfunktionen, die üblicherweise mit Y bezeichnet werden.)
Zeichnen Sie für alle berechneten Funktionen $|F_l^m|^2$ als Polardiagramme in einer Ebene, in der ϑ variiert wird. (Wenn Sie keine Möglichkeit haben, Polardiagramme mit dem Computer zu erstellen, kopieren Sie entsprechende Abbildungen aus Literatur, ordnen diesen die Formeldarstellungen der Funktionen zu und notieren, inwiefern den Formeln anzusehen ist, bei welchen Winkeln es Extrema gibt - also die Kurve maximalen Abstand vom Ursprung hat - und auch wieso es gegebenenfalls verschieden große Extrema gibt.)

Aufgabe 45 (E): Harmonischer Kugeloszillator (10 Punkte)

Betrachten Sie den isotropen harmonischen Oszillator in drei Dimensionen, dessen Hamiltonoperator lautet:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2\vec{r}^2$$

wobei $\vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ und $\vec{r}^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$. Die Eigenfunktionen sind natürlich Produkte der Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators:

$$\Psi_{n_x n_y n_z}(\vec{r}) = \Psi_{n_x}(x)\Psi_{n_y}(y)\Psi_{n_z}(z)$$

und die Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n+3/2)$ mit $n = n_x + n_y + n_z$.

a) (3 P.) Bringen Sie zunächst eine plausible Argumentation, die folgende Aussage aus der Kombinatorik beweist: Um n (ununterscheidbare) Kugeln auf r (unterscheidbare) Kästen zu verteilen, gibt es $\binom{n+r-1}{n}$ Möglichkeiten. (Der Binomialkoeffizient $\binom{a}{b}$ (sprich: " a über b") mit den nicht-negativen ganzen Zahlen a und b, wobei $a \geq b$, berechnet sich zu $\frac{a!}{b!(a-b)!}$.)
Geben Sie jetzt eine allgemeine Formel für den Entartungsgrad des Zustands mit E_n für den Kugeloszillator an und rechnen Sie diesen für n von 0 bis 5 auch explizit aus.

b) (2 P.) Schreiben Sie alle normierten Eigenfunktionen zu $n=2$ in kartesischen Koordinaten auf.

c) (5 P.) Drücken Sie die in b) erhaltenen Funktionen in Kugelkoordinaten aus und separieren Sie soweit wie möglich Faktoren ab, die nur von r abhängen.
Bilden Sie Linearkombinationen, die bis auf Konstanten und r-abhängige Faktoren gleich Funktionen aus 44 e) sind. Sie sollten F_0^0, F_2^0, $F_2^{\pm 1}$ und $F_2^{\pm 2}$ bilden können. D.h. zur Energie E_2 gehören Zustände mit Drehimpuls $l=2$, aber auch einer mit $l=0$.

Aufgabe 46 (T): Zwei-Niveausystem II (Spin-Polarisation) (schriftlich - 5 Punkte)

a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen (reinen) normierten Zustand $|\psi\rangle$ im zwei-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_2$ gilt

$$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \mathbf{n}$$

mit $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ einem normierten Richtungsvektor ($|\mathbf{n}| = 1$). $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor gebildet mit den Pauli Matrizen. Es gibt also zu jedem $|\psi\rangle$ eine Richtung $\mathbf{n}$, so dass der Erwartungswert des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in Richtung $\mathbf{n}$ zeigt.

b) (2 Punkte) Bei einer Messung an diesem Zustand wird die Wahrscheinlichkeit p bestimmt, den Eigenwert $+1$ von σ_z zu finden. Zeigen Sie, dass $p = \frac{1}{2}(1 + n_z)$ gilt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+1$ von σ_x zu messen?

Aufgabe 47 (T): Zusammengesetztes System (Spin-Addition) (schriftlich - 9 Punkte)

Ein quantenmechanisches System im Hilbertraum $\mathcal{H}$ sei zusammengesetzt aus zwei Zwei-Niveau-Systemen, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2^{(1)} \otimes \mathcal{H}_2^{(2)}$. In den Zwei-Niveau-Systemen mit Hilberträumen $\mathcal{H}_2^{(1)}$ und $\mathcal{H}_2^{(2)}$ seien die Standard-Orthonormalbasen $\{|\downarrow^{(1)}\rangle, |\uparrow^{(1)}\rangle\}$ und $\{|\downarrow^{(2)}\rangle, |\uparrow^{(2)}\rangle\}$ bekannt, die jeweils die Operatoren $1^{(1)}$ und $\sigma_z^{(1)}$, beziehungsweise $1^{(2)}$ und $\sigma_z^{(2)}$ diagonalisieren.

a) (3 Punkte) Welche Dimension hat $\mathcal{H}$? Stellen Sie eine (einfache) ONB von $\mathcal{H}$ auf und geben Sie die Wirkung der drei Operatoren $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ auf die Basisvektoren an. Welche der $\boldsymbol{\sigma}$ Operatoren sind diagonal in dieser Basis? Welche Eigenwerte besitzen sie, und welche Entartungsgrade?

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Wirkung der beiden Operatoren $\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$ auf die Basisvektoren von $\mathcal{H}$ und berechnen Sie damit $\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Fassen Sie die Eigenzustände, die eine gemeinsame Eigenbasis von $\boldsymbol{\sigma}^2$ und σ_z bilden in zwei (unterschiedlich große) Untergruppen zusammen. Welche Symmetrieeigenschaften bzgl. Teilchenaustausch haben die Zustände in den beiden Gruppen (Unterräumen)?

c) (3 Punkte) Das System im Hilbertraum $\mathcal{H}_2^{(1)}$ werde nun als quantenmechanisches Teilchen mit innerem Freiheitsgrad (Spin) interpretiert, der zwei Werte annehmen kann. Genauso das System $\mathcal{H}_2^{(2)}$. Zwischen beiden Teilchen wirke ein Potential, das von der relativen Spinorientierung abhängt, also

$$V = V_0 + V_1 \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}.$$

Stellen Sie die beiden Schrödingergleichungen auf, die sich für die beiden Untergruppen von Eigenzuständen (genannt S und T !) aus Teil b) ergeben und bestimmen Sie die Energien der Zustände.

Hinweis: Zerlegen Sie V in $V_S P_S + V_T P_T$ mit den Projektoren P_S und P_T auf die beiden Unterräume S und T.

Aufgabe 48 (T): Zerlegung des Impulsoperators (schriftlich - 6 Punkte)

In der Ortsdarstellung lautet der Impulsoperator (in einer Dimension) $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ und ist definiert auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen $\psi(x)$ für $a \leq x \leq b$. Seine Eigenwertgleichung lautet

$$\hat{p}\,\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = p\,\psi(x)$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie mit dem Skalarprodukt $(\phi,\ \psi) = \int_a^b \phi^*(x)\psi(x)\mathrm{d}x$, dass

a) p i.A. nicht hermitesch ist

b) die Eigenwerte $p \in \mathrm{C}$ sind

falls keine Randbedingungen an die $\psi(x)$ gestellt werden.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen $a \to -\infty,\ b \to \infty$ und $\lim_{|x|\to\infty} |\psi(x)| < \infty$ der Operator $\hat{p}$ hermitesch wird und nur reelle Eigenwerte besitzt. *Hinweis*: Betrachten Sie $(\psi, \hat{p}\psi)$.

c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen, $a \to -\infty,\ b \to \infty$, und $\psi(x)$ sei quadratintegrabel, $\hat{p}$ hermitesch wird, aber keine normierbaren Eigenfunktionen besitzt.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen $a \to 0,\ b \to L$ und $\psi(0) = \psi(L) = 0$ der Operator $\hat{p}$ hermitesch wird, aber keine Eigenfunktionen besitzt.

e) (2 Punkt) Zeigen Sie, dass mit den Randbedingungen $a \to 0,\ b \to L$ und $\alpha\psi(0) = \psi(L)$ mit $|\alpha| = 1$ der Operator $\hat{p}$ hermitesch wird und seine Eigenfunktionen eine Orthonormalbasis bilden. Zeigen Sie, dass mit diesen Randbedingungen an ψ die Gleichung $(\hat{p}^+\varphi, \psi) = (\varphi, \hat{p}\psi)$ gilt, wenn $\hat{p}^+ = p$ und φ dieselben Randbedingungen wie ψ erfüllt. War eine vergleichbare Einschränkung an φ im Fall d) notwendig?