UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)
Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151
E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de
Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)
Raum P 907, Tel. (07531)88-4678
E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs
Sommersemester 2009
Übungsblatt 7, Ausgabe 10. 06. 2009
Abgabe am 17. Juni 2009
Besprechung in den Übungen am 17. und 19. 06. 2009

Aufgabe 34 (E): Zweidimensionaler harmonischer Oszillator (8 Punkte)

Die Bewegung eines Teilchens werde durch einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator beschrieben. Der Hamiltonoperator lautet

$$H = H_x + H_y \quad \text{mit} \quad H_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \quad \text{und} \quad H_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 y^2$$

(Der Oszillator ist isotrop. Für x- und y-Richtung erscheint dasselbe ω.)

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung $H\Psi = E\Psi$ durch einen Separationsansatz $\Psi(x, y) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y)$ gelöst wird, wobei Ψ_x und Ψ_y jeweils Lösungen der Schrödingergleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators zu den Eigenwerten E_x und E_y sind. Es gilt dann $E = E_x + E_y$. (Hinweis: Wenn ein Ausdruck, der nur von x abhängt, gleich einem Ausdruck ist, der nur von y abhängt, müssen beide ein und dieselbe Konstante sein.)

b) (2 P.) Zählen Sie die möglichen Energieeigenwerte E auf. Diskutieren Sie die Entartung der drei niedrigsten Niveaus.

c) (1 P.) Zeigen Sie, dass die Operatoren H und $L_z = xp_y - yp_x$ vertauschen.

d) (3 P.) Die niedrigsten beiden Eigenfunktionen des eindimensionalen harmonischen Oszillators lauten

$$\Psi_{x0}(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{y0}(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega y^2/2\hbar} \quad \text{und}$$

$$\Psi_{x1}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} x\, e^{-m\omega x^2/2\hbar} \quad \text{bzw.} \quad \Psi_{y1}(y) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/4} y\, e^{-m\omega y^2/2\hbar}$$

Zeigen Sie, dass $\Psi_{x0}\Psi_{y0}$ Eigenfunktion zu L_z ist, $\Psi_{x1}\Psi_{y0}$ bzw. $\Psi_{x0}\Psi_{y1}$ jedoch nicht.
Setzen Sie jetzt eine Linearkombination $\Psi_{x1}\Psi_{y0} + \alpha\Psi_{x0}\Psi_{y1}$ an und bestimmen Sie die komplexe Zahl α so, dass dies eine Eigenfunktion von L_z ergibt. (Sie brauchen diese Wellenfunktion hier nicht zu normieren.)

Aufgabe 35 (E): Verschobener harmonischer Oszillator (4 Punkte)

Hat das Teilchen, das sich im Harmonischen-Oszillator-Potential bewegt, eine Ladung q und wird außerdem ein elektrisches Feld $\mathcal{E}$ angelegt, so lautet die stationäre Schrödingergleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x\right)\varphi_n(x) = E_n\varphi_n(x)$$

$q\mathcal{E}$ ist eine Konstante. Bestimmen Sie die Eigenfunktionen φ_n und die Energieeigenwerte E_n für dieses Problem.
Hinweis: Ersetzen Sie x durch eine Variable x_1 so dass sich der Hamiltonoperator als

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 - q\mathcal{E}x = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x_1^2 + const.$$

schreiben lässt.
Die φ_n sind als explizite Funktionen von x zu schreiben bzw. wie in Aufgabe 31 als Funktionen einer dimensionslosen Variable mit der Angabe, wie diese mit x zusammenhängt.

Aufgabe 36 (E): Neutronen im Gravitationsfeld (8 Punkte)

Auf hinreichend kleiner Skala gehorchen auch mechanische Bewegungen der Quantentheorie. Dies wurde in einem Experiment mit Neutronen beobachtet (Nature Vol.415, p.297 (2002)). Sie fallen im Gravitationsfeld nicht kontinuierlich, sondern in Sprüngen! In dieser Aufgabe berechnen wir Zustände von Teilchen in einer Anordnung wie in dem Experiment.
Auch in dieser Aufgabe brauchen Sie Wellenfunktionen nicht zu normieren.

a) (1 P.) Unser Problem ist eindimensional in z-Richtung. Der Boden ist ein total reflektierender Spiegel. Das Potential lautet

$$V(z) = \begin{cases} mgz & z \geq 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases}$$

Die Schrödingergleichung für $z > 0$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + mgz\right)\ \varphi(z) = E\ \varphi(z) \tag{1}$$

lässt sich im Impulsraum viel leichter lösen und lautet dort

$$\left(\frac{p_z^2}{2m} + i\hbar mg\frac{\partial}{\partial p_z}\right)\ \tilde{\varphi}(p_z) = E\ \tilde{\varphi}(p_z) \tag{2}$$

Geben Sie die Lösung $\tilde{\varphi}(p_z)$ der Differentialgleichung (2) an. Hinweis: Raten Sie als Lösung eine Exponentialfunktion mit einem Polynom in p_z im Exponenten.

b) (2 P.) Führen Sie die inverse Fouriertransformation aus, um die Wellenfunktion im Ortsraum zu erhalten, d.h. berechnen Sie

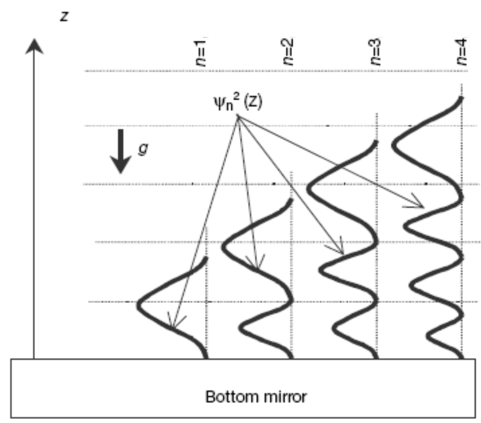
$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dp_z\ \tilde{\varphi}(p_z)\ e^{ip_z z/\hbar}.$$

Ein Ausdruck der Form $Ai(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\tau\ \cos(\omega\tau + \frac{\tau^3}{3})$, die sogenannte Airy-Funktion, darf als Integral stehenbleiben. Finden Sie den Parameter ω in unserem Fall.

c) (1 P.) Beschaffen Sie sich einen Graphen der Airy-Funktion (z.B. Internet Wikipedia, bitte ausdrucken).

d) (2 P.) Wegen $V = \infty$ für $z < 0$ muss $\varphi(0) = 0$ sein, also muss das Argument ω für $z = 0$ so sein, dass Ai dort eine Nullstelle hat. Geben Sie aus dieser Bedingung die vier kleinstmöglichen Werte für E an. (Die Nullstellen lesen Sie aus Ihrem Graphen ab, und für m ist die Masse eines Neutrons einzusetzen.)

e) (2 P.) Die Eigenfunktionen sind "nach oben verschobene" Airy-Funktionen. Geben Sie wiederum durch Ablesen aus ihren Graphen der Airy-Funktion und entsprechendes Umrechnen des Arguments für die ersten vier Zustände jeweils die Höhe z an, in der das Maximum der Wellenfunktion liegt, das am weitesten vom Boden entfernt ist. (Da dies das größte Maximum ist, ist das hier der wahrscheinlichste Wert.)



In der Tat wurden in dem Experiment im Rahmen der Messgenauigkeit unterhalb einer Mindesthöhe deutlich weniger Neutronen registriert als klassisch zu erwarten. Die Neutronen waren dort waagerecht auf eine Fallstrecke geschossen worden.

Aufgabe 37 (T): Harmonischer Oszillator II (schriftlich - 8 Punkte)

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $|n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, \ldots$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die folgenden Größen berechnet werden:

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$ mit den Orts- und Impuls-Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ diagonal ist.

c) (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:

a) Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass Spur$([A, B]) = 0$ gilt, wobei Spur$(A) = \sum_i A_{ii}$.

b) Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ in Matrixdarstellung müsste nach Punkt (1) also in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt.

Aufgabe 38 (T): Landau-Niveaus (schriftlich - 12 Punkte)

Der Hamiltonoperator für ein geladenes Teilchen in einem magnetischen Feld ist $H = (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2/2m$, wobei $\mathbf{A}$ das Vektorpotential ist. Nehmen Sie an, dass das magnetische Feld konstant in z-Richtung zeigt.

a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass ein mögliches Vektorpotential für ein solches Feld $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{r}/2$ ist. Zeigen Sie auch, dass $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass der Teilchenimpuls in z-Richtung Null ist. Zeigen Sie, dass der Hamiltonian in der Form

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - \omega L_z \tag{1}$$

geschrieben werden kann, wobei L_z der Operator für die z-Komponente des Drehimpulses ist.

c) (2 Punkte) Definieren Sie Vernichtungsoperatoren a_x und a_y analog zu denen des harmonischen Oszillators:

$$a_x = \frac{m\omega x + ip_x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a_y = \frac{m\omega y + ip_y}{\sqrt{2m\hbar\omega}}. \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass $[a_x, a_x^\dagger] = [a_y, a_y^\dagger] = 1$ und $[a_x, a_y^\dagger] = [a_x, a_y] = 0$ gilt und der Hamiltonian lautet

$$H = \hbar\omega[a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1 + i(a_x^\dagger a_y - a_y^\dagger a_x)] \tag{3}$$

d) (2 Punkte) Definieren Sie $b = (a_x + ia_y)/\sqrt{2}$ und zeigen Sie die 3 Relationen

a) $H = 2\hbar\omega(b^\dagger b + 1/2)$

b) $[b, b^\dagger] = 1$

c) $[b, H] = 2\hbar\omega b, \quad [b^\dagger, H] = -2\hbar\omega b^\dagger$

e) (2 Punkte) Lösen Sie jetzt analog zum harmonischen Oszillator das Eigenwertproblem $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$. Nehmen Sie dafür an, dass es einen kleinsten Eigenwert gibt und zeigen Sie, dass er $\hbar\omega$ ist. Zeigen Sie auch, dass der dazugehörige Eigenvektor $b|\phi_0\rangle = 0$ erfüllt. Zeigen Sie durch Vergleich mit Aufgabe 32, dass die verbleibenden, normierten Eigenvektoren und Eigenwerte durch

$$|\phi_n\rangle = (b^\dagger)^n|\phi_0\rangle/\sqrt{n!} \tag{4}$$

$$E_n = \hbar\omega_L(n + 1/2) \tag{5}$$

gegeben sind, wobei $\omega_L = 2\ \omega$ die Larmorfrequenz ist.

f) (3 Punkte) $|u_0\rangle$ und $|v_0\rangle$ seien die eindeutigen Lösungen von $a_x|u_0\rangle = 0$ beziehungsweise $a_y|v_0\rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $\phi_0(x, y) = u_0(x)v_0(y)$ ein Grundzustand des Systems ist. Dieser Grundzustand ist nicht der Einzige. Um das einzusehen, definieren Sie den Operator $d = (a_x - ia_y)/\sqrt{2}$ und zeigen Sie, dass $[b, d] = 0$, $[b, d^\dagger] = 0$ und $[d, d^\dagger] = 1$ gilt. Definieren Sie nun

$$\phi_0^{(m)} = (d^\dagger)^m\phi_0/\sqrt{m!} \tag{6}$$

und zeigen Sie, dass auch diese Grundzustände sind. Daraus folgt, dass alle Zustände unendlichfach entartet sind.

g) (4 Zusatzpunkte) Das Vektorpotential kann auch gewählt werden zu $\mathbf{A} = (0, xB, 0)^T$. Lösen und diskutieren Sie die stationäre Schrödingergleichung.