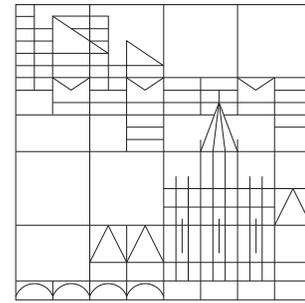
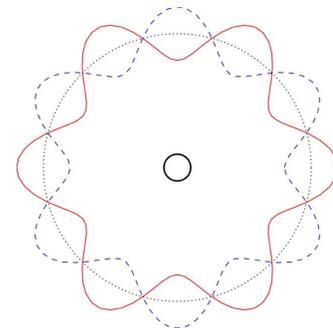
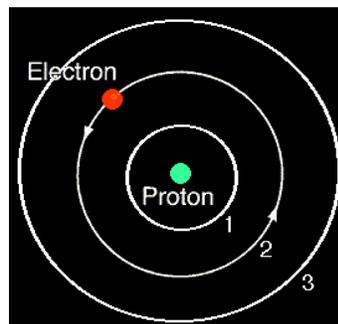
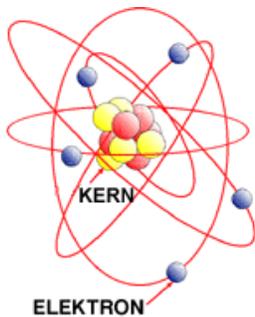


UNIVERSITÄT KONSTANZ  
 Fachbereich Physik  
 Prof. Dr. Georg Maret (Experimentalphysik)  
 Raum P 1009, Tel. (07531)88-4151  
 E-mail: Georg.Maret@uni-konstanz.de  
 Prof. Dr. Matthias Fuchs (Theoretische Physik)  
 Raum P 907, Tel. (07531)88-4678  
 E-mail: Matthias.Fuchs@uni-konstanz.de



**Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs**  
**Sommersemester 2009**  
 Übungsblatt 10, Ausgabe 01.07.2009  
 Abgabe am 08.07.2009  
 Besprechung in den Übungen am 08. und 10.07.2009

**Aufgabe 49 (E): Bohrsches Atommodell (8 Punkte)**



Dem (historischen) Bohrschen Atommodell liegt das Bild zugrunde, dass die Elektronen in Kreisbahnen um den Kern herumlaufen wie die Planeten um die Sonne. Ganz nach Newtonscher Physik bestimmt sich die Bahngeschwindigkeit daraus, dass sich die Zentrifugalkraft und die Coulombkraft zwischen Kern und Elektron die Waage halten. Als Postulat wird nun angenommen, dass der der Bewegung auf der Kreisbahn zuzuordnende Drehimpuls nur ganzzahlige Vielfache des Wirkungsquantums annimmt,  $L = n\hbar$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$  (Die Wellenvorstellung spielte dabei insofern eine Rolle als dies der Situation entspricht, dass eine ganze Anzahl Wellenlängen ( $\lambda = h/p$ ) genau auf den Kreiumfang passt.)

a) (4 P.) Der Kern sei hier als ruhend bzw. im Vergleich zum Elektron unendlich schwer angesehen. Für ein einzelnes Elektron, das um einen  $Z$ -fach geladenen Kern kreist, leiten Sie folgende Ausdrücke für die erlaubten Bahnradien und zugehörigen Energien her:

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Z m_e e^2} \quad \text{und} \quad E_n = -\frac{Z^2 m_e e^4}{8n^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

Die Energie ist auch ganz klassisch als Summe der potentiellen Energie im Coulombpotential und der kinetischen Energie aufzustellen. (Mit der Comptonwellenlänge  $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$  und der sogenannten Feinstrukturkonstanten  $\alpha = \frac{e^2}{2c\epsilon_0 \hbar}$  werden  $r_n$  und  $E_n$  häufig als  $r_n = \frac{n^2 \lambda_C}{2\pi Z \alpha}$  und

$E_n = -\frac{m_e c^2 Z^2 \alpha^2}{2 n^2}$  geschrieben.) Rechnen Sie für  $n = 1, 2, 3$   $r_n$  und  $E_n$  für  $Z = 1$  auch in Zahlen aus (in Å bzw. eV).

b) (2 P.)

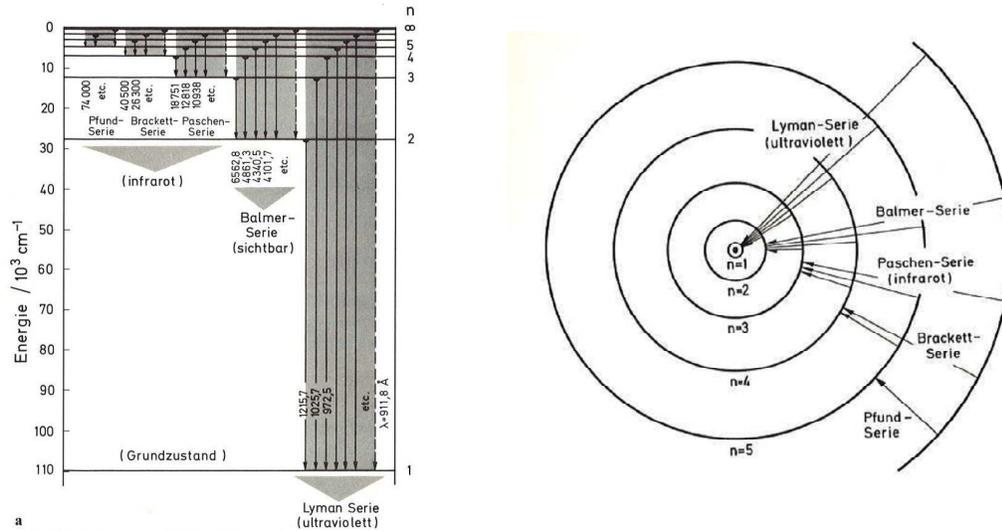
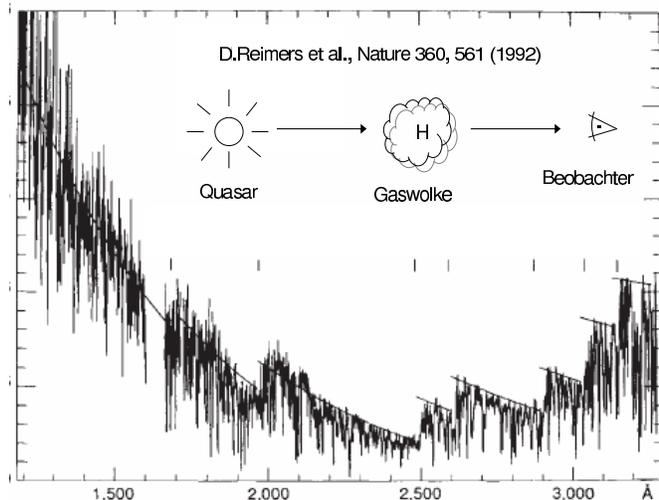


Abb. 8.4. a) Termschema für die Linien des Wasserstoff-Spektrums und Serieneinteilung. Die Wellenlängen der Übergänge sind in Å

Elektronen können unter Absorption bzw. Emission eines Photons zwischen verschiedenen Kreisbahnen hin- und herwechseln. Für die Energiedifferenz gilt dann  $E_{n_1} - E_{n_2} = \hbar\omega$ . Emissionslinien, die auf demselben unteren Niveau enden, werden zu Serien zusammengefasst. Betrachten Sie hier jeweils nur die unterste Linie einer Serie ( $\alpha$ -Linie), also  $n = 2 \rightarrow n = 1$ ,  $n = 3 \rightarrow n = 2$ , usw. Welche Linien liegen für Wasserstoff im sichtbaren Bereich (zwischen 4000 und 8000 Å)?

Aus der Energieformel aus a) ersehen Sie, dass die Lage der Niveaus von der Kernladungszahl abhängt. Welche Linien liegen für einfach ionisiertes Helium im sichtbaren Bereich? (Unsere Formeln aus a) gelten für jede beliebige Kernladungszahl, jedoch streng genommen nur für Atome mit nur einem Elektron, da wir keine gegenseitige Abstoßung mehrerer Elektronen in dem Modell einbezogen haben.)

c) (2 P.) Als Lyman-Alpha-Wald bezeichnen Astronomen eine Vielzahl von scharfen Absorptionslinien im Spektrum von Quasaren, deren Wellenlänge nur geringfügig kleiner als die der Lyman-Alpha-Linie, der Absorptionslinie des neutralen Wasserstoffs, ist. Wie Untersuchungen zeigten, nimmt die Anzahl dieser Linien mit der Entfernung der Objekte zu, woraus die Astronomen ableiteten, dass die Linien nicht von den Objekten selbst hervorgerufen werden, sondern von Wasserstoffwolken stammen, die sich zwischen den Objekten und der Erde befinden.



Die Wolken absorbieren dabei jeweils das Licht mit den Wellenlängen der Lyman-Linien. Durch die unterschiedliche Entfernung der Wolken besitzen diese aber eine unterschiedliche Rotverschiebung, wodurch die Linien an unterschiedlicher Stelle im Spektrum auftauchen. Damit

lassen sich aus der Anzahl, der Verteilung und der Stärke der Absorptionslinien Rückschlüsse auf die Verteilung und Massen der Wolken im Universum ziehen. Dabei ist auch zu beachten, dass wir mit grösserer Entfernung bzw. Rotverschiebung auch immer weiter in die Vergangenheit des Universums blicken. Eine kosmologische Rotverschiebung von  $z$  bedeutet, dass das Licht von diesem Ort zu einer Zeit ausgesandt wurde als das Universum  $(z + 1)$ mal kleiner war als heute. Das obenstehende Quasarspektrum, aufgenommen mit dem Hubble-Weltraum-Teleskop, zeigt sieben Kanten eines Lyman-Walds. Berechnen Sie nach  $z = (\lambda_{\text{beobachtet}} - 911,8 \cdot 10^{-10}\text{m})/911,8 \cdot 10^{-10}\text{m}$  die zugehörigen Rotverschiebungen. (Lassen Sie sich nicht dadurch verwirren, dass Lyman-Alpha-Wald als Schlagwort gebraucht wird. Die Lyman- $\alpha$ -Linie liegt bei  $1215,7 \text{ \AA}$ . Für die Kanten ist jedoch mit  $911,8 \text{ \AA}$  zu rechnen. Genau genommen handelt es sich hier um sogenannte Lyman-Limit-Systeme.)

### Aufgabe 50 (E): Wasserstoff-Schrödingergleichung und Radialteil der Wellenfunktion (6 Punkte)

Die Einelektron-Schrödingergleichung mit Coulombpotential lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \Delta \Psi - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi = E \Psi$$

$\Delta$  in Kugelkoordinaten lässt sich mit dem Operator  $L^2$  als  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2}$  schreiben. Machen wir für  $\Psi$  den Produktansatz  $\Psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi)$  und nutzen die bekannte Eigenschaft  $L^2 Y_l^m = l(l+1)\hbar^2 Y_l^m$  aus, so verbleibt folgende Differentialgleichung für den radialen Anteil:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{ar} \right) R(r) = -\frac{2m_e}{\hbar^2} E_{n,l} R(r)$$

wobei  $a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$  den Bohrschen Radius bedeutet. Rechnen Sie durch direktes Einsetzen nach, dass

$$R = N_{n,l} e^{-r/(na)} r^l \frac{d^{2l+1}}{d\rho^{2l+1}} e^\rho \frac{d^{n+l}}{d\rho^{n+l}} \rho^{n+l} e^{-\rho} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{2r}{na}$$

die Differentialgleichung erfüllt und gewinnen Sie so eine Formel für die Energieeigenwerte  $E_{n,l}$ . Schauen Sie dazu, z.B. in Wikipedia (Stichwort "Laguerre-Polynome"), die zugeordneten Laguerre-Polynome und die Differentialgleichung, die diese erfüllen, nach. Diese Information dürfen Sie verwenden. (Fehler in Wikipedia: Der Faktor bei  $y(x)$  in der Differentialgleichung für die zugeordneten Polynome ist  $n$ , nicht  $n - k$ .)

(Die Normierungskonstanten  $N_{n,l}$  interessieren hier nicht, in der folgenden Aufgabe sind sie angegeben.)  $\rho$  ist nur eine abkürzende Schreibweise für  $r$  mit dem konstanten Faktor  $2/na$ .  $R$  ist Funktion der einzigen Variablen  $r$  und alle Ableitungen sind eigentlich nach  $r$ .

### Aufgabe 51 (E): Dipolmatrixelemente im Wasserstoffatom (6 Punkte)

a) (2 P.) Rechnen Sie die Wasserstoffwellenfunktionen (s. vorherige Aufgabe)  $\Psi_{1,0,0}(r, \vartheta, \varphi)$ ,  $\Psi_{2,0,0}(r, \vartheta, \varphi)$  und  $\Psi_{2,1,0}(r, \vartheta, \varphi)$  explizit aus. Die benötigten Normierungskonstanten für die radialen Funktionen lauten  $N_{1,0} = 2a^{-3/2}$ ,  $N_{2,0} = \frac{1}{4\sqrt{2}} a^{-3/2}$ ,  $N_{2,1} = \frac{1}{12\sqrt{6}} a^{-5/2}$ . Die Winkelfunktionen wurden in Aufgabe 44 berechnet, können jedoch auch anderswo nachgeschlagen werden.

b) (2 P.) Berechnen Sie das Dipolmatrixelement

$$\vec{D} = \int d^3\vec{r} \Psi_A^* e\vec{r} \Psi_B = \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \Psi_A^*(r, \vartheta, \varphi) e \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} \Psi_B(r, \vartheta, \varphi)$$

für die Fälle: i)  $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$  und  $\Psi_B = \Psi_{1,0,0}$ , ii)  $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$  und  $\Psi_B = \Psi_{2,0,0}$ , iii)  $\Psi_A = \Psi_{1,0,0}$  und  $\Psi_B = \Psi_{2,1,0}$ . (Das  $e$  in der  $\vec{D}$ -Formel bedeutet die Elementarladung.)

c) (2 P.) Nehmen Sie die Ergebnisse aus b) als Bestätigung dafür, dass Dipolübergänge zwischen Niveaus beliebiger (hier verschiedener)  $n$  erlaubt sind, aber die  $l$  sich genau um eins unterscheiden müssen, wobei es egal ist, ob das Ausgangs- oder das Endniveau das höhere  $l$  hat. In unserem Wasserstoffmodell (bis jetzt ohne relativistische Korrektur und ohne Spin) gibt es zu jedem  $n$  (angefangen mit 1)  $2n - 1$  entartete Zustände mit  $l = -(n - 1), -(n - 2), \dots, n - 1$ . Tragen Sie in dem nebenstehenden Schema, das die Zustände bis  $n = 4$  zeigt, alle erlaubten Übergänge durch Verbinden der entsprechenden Balken ein.

	-3	-2	-1	0	1	2	3	$l$
4	—	—	—	—	—	—	—	
3		—	—	—	—	—		
2			—	—	—			
1				—				
$n$								

### Aufgabe 52 (T): Stark-Effekt (schriftlich - 10 Punkte)

Betrachtet werde ein Teilchen mit Masse  $m$  und Ladung  $q$  im (allgemeinen) Zentralfeld gegeben durch den Hamiltonoperator  $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$ . Ein  $s$ -Energieniveau mit Energie  $E_s$  liege dicht bei einem  $p$ -Energieniveau mit Energie  $E_p$ . Der Abstand dieser beiden Energieniveaus von den restlichen sei so groß gegen ihre Aufspaltung  $\Delta E = E_p - E_s > 0$ , dass alle anderen Niveaus vernachlässigt werden können.

a) (1 Punkt) Für welche drei Operatoren können gemeinsame Eigenzustände gefunden werden? Wieviele Eigenzustände gehören zu den beiden Niveaus; d.h. welche Entartungen liegen vor?

b) (1 Punkt) Charakterisieren Sie die Zustände nach ihren Eigenschaften unter Spiegelung  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ , welche in Kugelkoordinaten lautet  $(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (r' = r, \vartheta' = \pi - \vartheta, \varphi' = \pi + \varphi)$ .

c) Auf das System wirke ein konstantes elektrisches Feld der Stärke  $-F$  in  $\mathbf{z}$ -Richtung, welches zu einem elektrischen Potential  $\Phi(z) = Fz$  führt.

(i) (1 Punkt) Was ergibt sich für  $[L_z, \Phi]$ , wobei  $L_z$  die  $z$ -Komponente des Bahndrehimpulsoperators ist? Was folgern Sie daraus für die Matrixelemente von  $\Phi$ ? Welche sind Null?

(ii) (1 Punkt) Verwenden Sie die Eigenschaften von  $\Phi(z)$  und der Zustände unter Spiegelung, um alle Matrixelemente von  $\Phi$  zu finden, die ungleich Null sind, ohne diese explizit zu berechnen. Wie viele verschiedene sind es?

*Hinweis:* Wegen (i) reicht es aus, die Diagonalelemente zu betrachten. Bestimmen Sie dafür z.B. die Winkelanteile der Diagonalmatrixelemente von  $\Phi(z)$ .

Die Kugelflächenfunktionen zu den niedrigsten Quantenzahlen lauten

$$Y_0^0(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad ; \quad Y_1^0(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$$

$$Y_1^1(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin \vartheta \quad ; \quad Y_1^{-1}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\varphi} \sin \vartheta$$

d) (2 Punkte) Verwenden Sie die Ergebnisse von Aufgabenteil c) um die Energieeigenwerte der Matrix  $\langle i|H|j\rangle$  des Hamiltonoperators  $H = H_0 + q\Phi$  zu bestimmen;  $|i\rangle$  und  $|j\rangle$  stehen hier für die Eigenzustände der zwei betrachteten Energieniveaus (von  $H_0$ ).

e) (2 Punkte) Diskutieren Sie die Abhängigkeit der Energieeigenwerte von  $F$  anhand einer Skizze, indem Sie die Grenzfälle  $F \ll F_0$  und  $F \gg F_0$  mit  $F_0 = \Delta E/(2q\langle z\rangle)$  betrachten.

f) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Eigenzustand, der zur niedrigsten Energie gehört und diskutieren Sie seine Abhängigkeit von  $F$ .

### Aufgabe 53 (T): Feinstruktur (Spin-Bahn-Wechselwirkung) (schriftlich - 10 Punkte)

Ein Elektron mit Bahndrehimpuls  $\mathbf{L}$  (wobei  $l \geq 0$  und ganzzahlig) und Spin  $\mathbf{S}$  (wobei  $s=1/2$ ) befinde sich in einem schwachen homogenen Magnetfeld  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Vernachlässigt man zunächst die Spin-Bahn-Wechselwirkung  $H_{\text{SB}} \simeq 0$ , so lautet der Hamiltonoperator  $H = H_0 + H_m$  mit  $H_0 = \left(\frac{p^2}{2m} + V(r)\right) 1$  und  $H_m = \frac{\mu_B}{\hbar} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B}$  wobei  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton ist. Die zugehörige zeitabhängige Schrödingergleichung ist die Pauli-Gleichung

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}, t) \\ \psi_-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \equiv H \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}, t) \\ \psi_-(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Welche Basis diagonalisiert  $H_0$  und auch  $H_m$ ? Zeigen Sie, dass in dieser Basis die Energieaufspaltung im Magnetfeld  $B$  gegeben ist durch:

$$\Delta E_{n,l,m_l,m_s} = \mu_B(m_l + 2m_s)B.$$

b) (2 Punkte) Im Folgenden wird der Gesamtdrehimpuls  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  des Elektrons eingeführt (Drehimpulskopplung). Sind die Basiszustände aus a) Eigenzustände von  $\mathbf{J}^2$  und  $J_z$ ? Welche Dimension hat der Produktraum  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_{s=1/2}$  in dem  $H$  wirkt?

c) (3 Punkte) Gesucht sind die Eigenzustände  $|j, m_j, l, s\rangle$  von  $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$ . Die Eigenzustände in der *gekoppelten Basis* lassen sich durch Entwicklung der Form

$$|j, m_j, l, s\rangle = \sum_{m_l, m_s} \langle l, m_l, s, m_s | j, m_j, l, s\rangle |l, m_l, s, m_s\rangle$$

bestimmen. Die Koeffizienten  $\langle l, m_l, s, m_s | j, m_j, l, s\rangle$  werden *Clebsch-Gordon-Koeffizienten* genannt.

Zeigen Sie  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = (L_+S_- + L_-S_+)/2 + L_zS_z$  und damit durch Anwendung von  $\mathbf{J}^2$  und  $J_z$ , dass gilt

$$|j = l + \frac{1}{2}, m_j = l + \frac{1}{2}, l, s = \frac{1}{2}\rangle = |l, m_l = l, s = \frac{1}{2}, m_s = \frac{1}{2}\rangle,$$

wenn  $\mathbf{J}^2$  und  $J_z$  die bekannten Eigenwertgleichungen des Drehimpulses erfüllen. (Weitere Clebsch-Gordon-Koeffizienten sind schwieriger zu bestimmen.)

Überlegen Sie sich, dass für die Eigenwerte  $j$  von  $\mathbf{J}^2$  gilt:  $|l - s| \leq j \leq l + s$  (Dreiecksregel).

d) Die Wechselwirkung zwischen den magnetischen Momenten des Bahndrehimpulses  $\mathbf{L}$  und des Spins  $\mathbf{S}$  führt auf die Spin-Bahn-Kopplung (ein rein relativistischer Effekt) mit dem Hamiltonoperator  $H_{\text{SB}} = \frac{1}{2m^2c^2} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} V(r)$ , wo  $V(r) = e\phi(r)$  die potentielle Energie im elektrischen Potential  $\phi(r)$  des Atomkerns ist. Für die Diskussion der Spin-Bahn-Wechselwirkung wird im folgenden das Magnetfeld  $\mathbf{B} \equiv 0$  (d.h.  $H_m \equiv 0$ ) gesetzt, so dass der Hamiltonoperator des Elektrons jetzt durch  $H = H_0 + H_{\text{SB}}$  gegeben ist.

(i) (1 Punkt) Welche Form des Potentials  $\phi(r)$  führt auf

$$H_{\text{SB}} = \frac{1}{2m^2c^2} \frac{Ze^2}{r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S},$$

wobei  $Z$  die Kernladungszahl ist?

(ii) (2 Punkte) Berechnen Sie die Kommutatoren  $[H_{\text{SB}}, L_z]$  und  $[H_{\text{SB}}, S_z]$  und zeigen Sie, dass demzufolge die Basis von  $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$  den Operator  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  diagonalisiert.